

# DOĐA BİLİMLERİ VE MATEMATİKTE SÜRDÜRÜLEBİLİR VE TREND ÇALIŞMALAR



All Sciences Academy



*DOĐA BİLİMLERİ VE  
MATEMATİKTE  
SÜRDÜRÜLEBİLİR VE  
TREND ÇALIŞMALAR*

**Editör**  
**Prof. Dr. Neslihan İYİT**





***Doęa Bilimleri ve Matematikte Sürdürülebilir ve Trend Çalışmalar***  
***Editör: Prof. Dr. Neslihan İYİT***

**Dizayn:** All Sciences Academy Design

**Basım Tarihi:** Mayıs 2026

**Yayıncı Sertifika Numarası:** 72273

**ISBN:** 978-625-8993-46-2

© All Sciences Academy

[www.allsciencesacademy.com](http://www.allsciencesacademy.com)

[allsciencesacademy@gmail.com](mailto:allsciencesacademy@gmail.com)

# İÇERİK

## 1. Bölüm

<b>İkinci Mertebeden Lineer Adi Diferansiyel Denklemlerinin Sonlu Farklar Yöntemiyle Nümerik Çözümleri.....</b>	<b>4</b>
Ayşegül YURTAY, Melis ZORŞAHİN, Dursun IRK	

## 2. Bölüm

<b>Atmosferik Sporlar ve Aerobiyolojik Çalışmalar .....</b>	<b>19</b>
İsmühan POTOĞLU ERKARA	

## 1. Bölüm

# İkinci Mertebeden Lineer Adi Diferansiyel Denklemlerinin Sonlu Farklar Yöntemiyle Nümerik Çözümleri

**Ayşegül YURTAY<sup>1</sup>**

**Melis ZORŞAHİN<sup>2</sup>**

**Dursun IRK<sup>3</sup>**

- 1- Öğretmen; Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı  
aysegulyurtay@hotmail.com ORCID No: [0009-0009-1641-1238](https://orcid.org/0009-0009-1641-1238)
- 2- Doç. Dr.; Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü.  
mzorsahin@ogu.edu.tr ORCID No: [0000-0001-7506-4162](https://orcid.org/0000-0001-7506-4162)
- 3- Prof. Dr.; Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü.  
dirk@ogu.edu.tr ORCID No: [0000-0002-3340-1578](https://orcid.org/0000-0002-3340-1578)

## ÖZET

Mühendislik ve fen bilimlerinde karşılaşılan birçok fiziksel problemin matematiksel modellenmesi, ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler içeren sınır-değer problemleri ile ifade edilmektedir. Bu problemlerin analitik çözümlerinin her zaman mümkün olmaması, yüksek doğruluğa sahip güvenilir nümerik çözüm yöntemlerinin geliştirilmesini zorunlu kılmaktadır.

Bu çalışmada, ikinci mertebeden genel formda bir adi diferansiyel denklem içeren  $[a, b]$  tanım aralığı üzerinde tanımlanmış sınır-değer probleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için ikinci mertebeden doğruluğa sahip sonlu fark yaklaşımları kullanılmıştır.  $[a, b]$  tanım aralığı  $N$  eşit alt aralığa bölünerek bölünme noktaları elde edilmiştir. Genel denklemde bulunan birinci ve ikinci mertebeden türevler için seçilen bölünme noktalarında literatürde sıklıkla kullanılan sonlu fark yaklaşımlarının çözümü aranılan denklemde yerine yazılması ile sınır şartlarının kullanılması sonucunda  $N + 1$  denklem ve  $N + 1$  bilinmeyenden oluşan lineer bir denklem sistemine ulaşılmıştır.

Önerilen yöntemin doğruluğunu incelemek amacıyla, genel formda verilen denklemdeki parametrelerin farklı seçimleriyle elde edilen ve özel çözümleri bilinen 5 alt denklemin yaklaşık çözümleri araştırılmıştır. Bu denklemlerin tanım aralıkları üzerindeki analitik çözümlerinin grafikleri çizilmiştir. Yaklaşık çözümleri aranılan denklemlerin her birinin konum aralıkları  $N = 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$  sayıda alt aralıklara bölünerek elde edilen denklem sistemleri çözülmüştür. Ortaya çıkan çözümler için bulunan maksimum hatalar ve yakınsama oranları hesaplanmıştır. Bu değerler tablolarda gösterilmiştir. Son olarak  $N = 50$  için her bir denklemin mutlak hata grafikleri çizilmiştir. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde önerilen yöntemin doğruluğunun birinci ve ikinci mertebeden türevler için kullanılan sonlu fark yaklaşımlarının teorik değerleriyle uyumlu olduğu görülmüştür.

*Anahtar Kelimeler – İkinci mertebeden sınır-değer problemi; Sonlu farklar metodu; Mutlak hata; Yakınsama oranı; Yaklaşık çözüm*

---

## GİRİŞ

Birçok bilim dalında karşılaşılan olayların matematiksel modellemesi adi veya kısmi diferansiyel denklemler kullanılarak ifade edilmektedir. Belirli şartlar altında çözümleri aranılan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin analitik (tam) çözümlerini elde etmek ise her zaman mümkün olmayabilir. Bu durumunda çözümü aranılan diferansiyel denklemleri yaklaşık çözebilmek için sürekli bir fonksiyonu belirli noktalardaki değerlerine indirgeyen sayısal yöntemler kullanılabilir. Bu

yöntemlerden en çok bilineni sonlu farklar yöntemidir (LeVeque, 2007; Strikwerda, 2004; Smith, 1985; Mitchell ve Griffiths, 1980).

Sonlu farklar yönteminin temel amacı Taylor serisi açılımına dayanarak türev ifadelerini cebirsel fark ifadeleriyle değiştirmektir. Sonlu farklar yönteminde ilk olarak sürekli bir  $f(x)$  fonksiyonunun  $[a, b]$  tanım aralığı,  $h$  adım aralığı uzunluğu olmak üzere

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

olarak eşit uzunluklu ayırık noktalara bölünür. Taylor seri açılımlarının kullanılmasıyla  $f(x)$  fonksiyonunun birinci mertebeden türevine

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \\ f'(x) &\approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \\ f'(x) &\approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \end{aligned}$$

yaklaşımları yapılabilir. Bu yaklaşımlara sırasıyla ileri, geri ve merkezi fark yaklaşımları denir. Bu ve benzeri yaklaşımlar diferansiyel denklemdeki türevlerin yerine konulduğunda, orijinal diferansiyel denklem bir fark denkleme veya bir lineer/lineer olmayan denklem sistemine dönüşür.

Özellikle sınır değer problemlerinde (boundary value problems) yaygın olarak kullanılan bu yöntem, mühendislik yapılarının analizinden ısı iletimi problemlerine kadar geniş bir uygulama alanına sahiptir.

Bu çalışmada genel formda verilen ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklem içeren bir sınır değer probleminin yaklaşık çözümü ikinci mertebeden sonlu fark yaklaşımları kullanılarak yaklaşık olarak çözülecektir. Önerilen yöntemin doğruluğunu kontrol etmek için genel formu verilen denklemdeki katsayıların seçimleri altında bulunan 5 farklı diferansiyel denklem çözülerek sonuçlar incelenecektir.

Bu çalışmada yaklaşık çözümü araştırılacak ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem ile sınır şartları

$$a_0(x)u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = b(x) \quad (1)$$

ve

$$\begin{aligned} u(a) &= \lambda_1 \\ u(b) &= \lambda_2 \end{aligned}$$

formunda olacaktır. (1) denklemindeki katsayıların özel seçimleri için elde edilen ve yaklaşık çözümleri araştırılacak denklemler sınır şartları ve özel çözümleri ile aşağıda verilmiştir:

Durum 1:

$$a_0(x) = 1, a_1(x) = 0, a_2(x) = 1, b(x) = 0$$

seçimleri altında

$$u'' + u = 0 \quad (2)$$

denkleminin sınır şartları

$$u(0) = 1$$

$$u(4) = 2$$

alındığında sınır değer probleminin özel çözümü

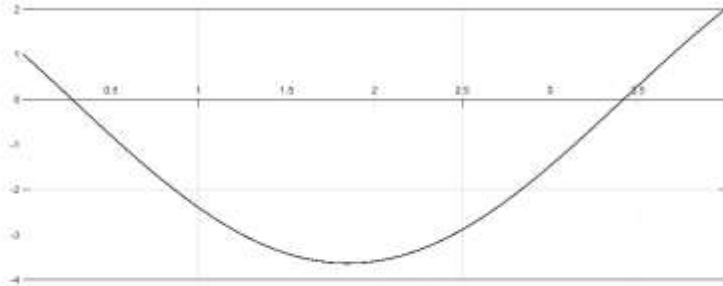
$$c_1 = -\frac{\cos 4 - 2}{\sin 4}$$

$$c_2 = 1$$

olmak üzere

$$u(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) \quad (3)$$

olur. (3) özel çözümünün  $[0,4]$  konum aralığı üzerindeki şekli Şekil 1 de verilmiştir.



Şekil 1: Birinci durumda özel çözüm

Durum 2:

$$a_0(x) = 1, a_1(x) = -5, a_2(x) = 6, b(x) = 0$$

seçimleri altında

$$u'' - 5u' + 6u = 0 \quad (4)$$

denkleminin sınır şartları

$$\begin{aligned} u(0) &= 2 \\ u(2) &= -2 \end{aligned}$$

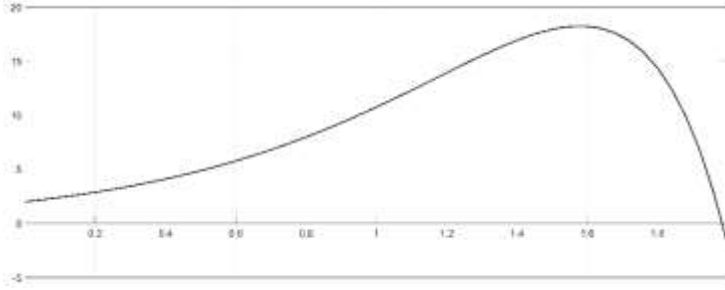
alındığında sınır değer probleminin özel çözümü

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{2(e^6 + 1)}{e^4 - e^6} \\ c_2 &= \frac{2(e^4 + 1)}{e^4 - e^6} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$u(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \quad (5)$$

olur. (5) özel çözümünün  $[0,2]$  konum aralığı üzerindeki şekli Şekil 2 de verilmiştir.



Şekil 2: İkinci durumda özel çözüm

Durum 3:

$$a_0(x) = x^2, a_1(x) = x, a_2(x) = -1, b(x) = 0$$

seçimleri altında

$$x^2 u'' + x u' - u = 0 \quad (6)$$

denkleminin sınır şartları

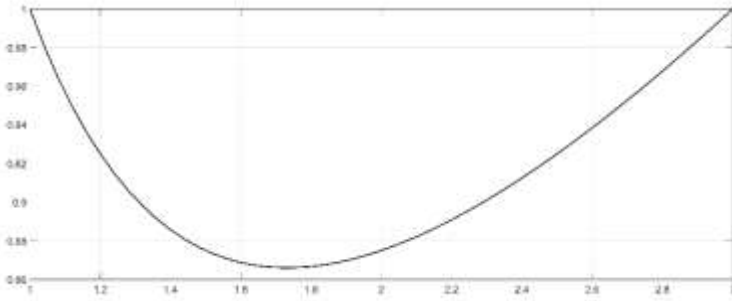
$$u(1) = 1,$$

$$u(3) = 1$$

alındığında sınır değer probleminin özel çözümü

$$u(x) = \frac{1}{4}(x + 3/x) \quad (7)$$

olur. (7) özel çözümünün  $[1, 3]$  konum aralığı üzerindeki şekli Şekil 3 de verilmiştir.



Şekil 3: Üçüncü durumda özel çözüm

Durum 4:

$$a_0(x) = 1, a_1(x) = 2, a_2(x) = -3, b(x) = e^x$$

seçimleri altında

$$u'' + 2u' - 3u = e^x \quad (8)$$

denkleminin sınır şartları

$$u(0) = 1$$

$$u(2) = e$$

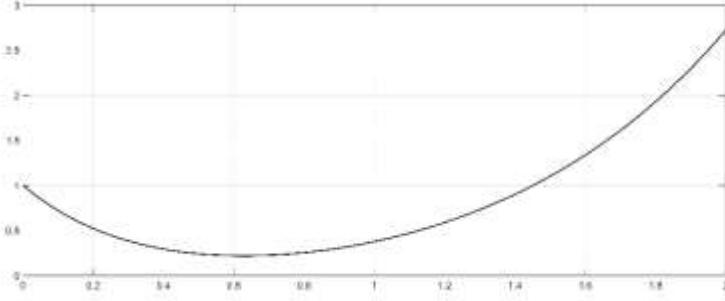
alındığında sınır değer probleminin özel çözümü

$$c_1 = -\frac{3e^2 - 2e}{2(e^{-6} - e^2)}$$
$$c_2 = \frac{2e^{-6} + e^2 - 2e}{2(e^{-6} - e^2)}$$

olmak üzere

$$u(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x + \frac{x e^x}{4} \quad (9)$$

olur. (9) özel çözümünün  $[0,2]$  konum aralığı üzerindeki şekli Şekil 4 de verilmiştir.



Şekil 4: Dördüncü durumda özel çözüm

Durum 5:

$$a_0(x) = 1, a_1(x) = x, a_2(x) = -1, b(x) = 2x + 2/x$$

seçimleri altında

$$u'' + x u' - u = 2x + 2/x \quad (10)$$

denkleminin sınır şartları

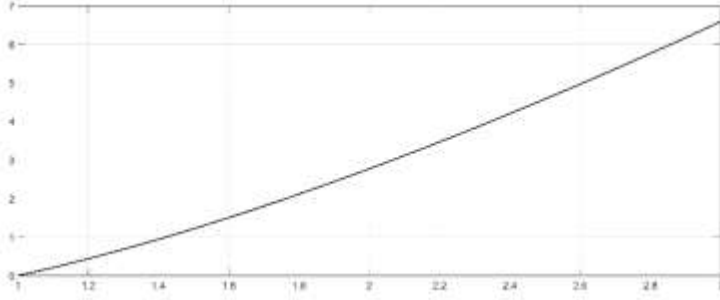
$$u(1) = 0$$

$$u(3) = 6 \ln 3$$

alındığında sınır değer probleminin özel çözümü

$$u(x) = 2x \ln x \quad (11)$$

olur. (11) özel çözümünün  $[1,3]$  konum aralığı üzerindeki şekli Şekil 5 de verilmiştir.



Şekil 5: Beşinci durumda özel çözüm

## YÖNTEMİN UYGULANMASI

$x = x_m, m = 1, 2, \dots, N - 1$  noktasındaki ikinci mertebeden doğruluğa sahip merkezi sonlu fark yaklaşımları

$$\alpha_{1,1} = -\frac{1}{2h}, \quad \alpha_{1,2} = 0, \quad \alpha_{1,3} = \frac{1}{2h}$$

$$\alpha_{2,1} = \frac{1}{h^2}, \quad \alpha_{2,2} = -\frac{2}{h^2}, \quad \alpha_{2,3} = \frac{1}{h^2}$$

olmak üzere

$$w'_m = \alpha_{1,1}w_{m-1} + \alpha_{1,2}w_m + \alpha_{1,3}w_{m+1}$$

$$w''_m = \alpha_{2,1}w_{m-1} + \alpha_{2,2}w_m + \alpha_{2,3}w_{m+1}$$

formunda bulunabilir (Smith, 1985). İkinci mertebeden doğruluğa sahip sonlu fark yaklaşımları yaklaşık çözümü araştırılan denklemde yerine yazılırsa  $m = 1, 2, \dots, N - 1$  için ilk olarak

$$a_0(x_m)(\alpha_{2,1}w_{m-1} + \alpha_{2,2}w_m + \alpha_{2,3}w_{m+1})$$

$$+ a_1(x_m)(\alpha_{1,1}w_{m-1} + \alpha_{1,2}w_m + \alpha_{1,3}w_{m+1}) + a_2(x_m)w_m = b(x_m)$$

denklemi ve düzenleme yapılırsa

$$(a_0(x_m)\alpha_{2,1} + a_1(x_m)\alpha_{1,1})w_{m-1}$$

$$+ (a_0(x_m)\alpha_{2,2} + a_1(x_m)\alpha_{1,2} + a_2(x_m))w_m$$

$$+ (a_0(x_m)\alpha_{2,3} + a_1(x_m)\alpha_{1,3})w_{m+1} = b(x_m) \quad (12)$$

elde edilir. Elde edilen denklem sayısı  $m = 1, 2, \dots, N - 1$  için  $N - 1$  iken bilinmeyen sayısı

$$w_0, w_1, \dots, w_{N-1}, w_N$$

olmak üzere  $N + 1$  dir. Denklem ve bilinmeyen sayısını eşitlemek için gereken ilave iki denklem

$$u(a) = w_0 = \lambda_1 \quad (13)$$

$$u(b) = w_N = \lambda_2 \quad (14)$$

sınır şartlarından elde edilebilir.  $m = 1, 2, \dots, N - 1$  için (12) denklemleri ile sınır şartlarından elde edilen (13-14) denklemleri matris formunda

$$\begin{aligned} \delta_m^{(j)} &= a_0(x_m)\alpha_{2,j} + a_1(x_m)\alpha_{1,j}, j = 1, 3 \\ \delta_m^{(2)} &= a_0(x_m)\alpha_{2,2} + a_1(x_m)\alpha_{1,2} + a_2(x_m) \end{aligned}$$

ve

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_1^{(1)} & \delta_1^{(2)} & \delta_1^{(3)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2^{(1)} & \delta_2^{(2)} & \delta_2^{(3)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \delta_{N-2}^{(1)} & \delta_{N-2}^{(2)} & \delta_{N-2}^{(3)} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \delta_{N-1}^{(1)} & \delta_{N-1}^{(2)} & \delta_{N-1}^{(3)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$W = (w_0, w_1, w_2, \dots, w_{N-1}, w_N)^T,$$

$$B = (\lambda_1, b(x_1), b(x_2), \dots, b(x_{N-1}), \lambda_2)^T$$

olmak üzere

$$AW = B \quad (15)$$

formunda yazılır. Denklem sistemi çözülerek

$$w_0, w_1, \dots, w_{N-1}, w_N$$

bilinmeyenleri elde edilir.

### ***Test Problemleri***

Bu bölümde önerilen yaklaşık yöntemin doğruluğunu kontrol etmek için (1) genel denkleminin özel durumları olarak elde edilen beş farklı lineer diferansiyel denklemin yaklaşık çözümleri incelenecektir. Yaklaşık çözüm araştırılırken konum aralıkları

$$N = \{20,25, \dots,50\}$$

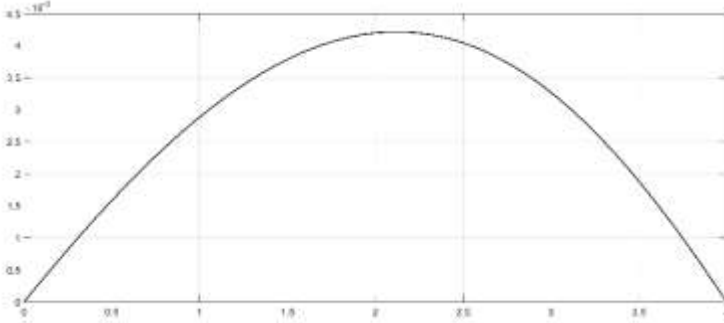
olarak alt aralıklara ayrılacak ve önerilen metot kullanıldığında elde edilen  $L_\infty$  hata normları ve yakınsama oranları çizelgelerde verilerek,  $N = 50$  iken elde edilecek mutlak hatanın grafiği çizilecektir.

**Durum 1:** İlk olarak genel denklemin özel bir formu olarak verilen (2) denkleminin yaklaşık çözümü araştırılacaktır.  $[0,4]$  konum aralığı üzerinde elde edilen  $L_\infty$  hata normları ve yakınsama oranları Tablo 1 de verilmiştir. Tablo 1 incelendiğinde alt aralık sayısı arttığında  $L_\infty$  hata normlarının küçüldüğü ve yakınsaklık oranlarının ise önerilen yöntemin teorik doğruluğu olan 2 değerini aldığı görülmektedir.

Tablo 1: Birinci durumda bulunan  $L_\infty$  hata normları ve yakınsama oranları

$N$	$L_\infty$	YO	$N$	$L_\infty$	YO
20	$2.62 \times 10^{-2}$		40	$6.58 \times 10^{-3}$	1.99
25	$1.68 \times 10^{-2}$	1.99	45	$5.20 \times 10^{-3}$	2.00
30	$1.17 \times 10^{-2}$	1.99	50	$4.21 \times 10^{-3}$	2.00
35	$8.59 \times 10^{-3}$	2.00			

Şekil 6 de ise  $N = 50$  alındığında bulunan mutlak hatanın grafiği verilmiştir. Şekil incelendiğinde maksimum hatanın Tablo 1 de bulunan değer ile uyumlu olduğu ve hatanın konum aralığının orta kısımlarında olduğu görülmektedir.



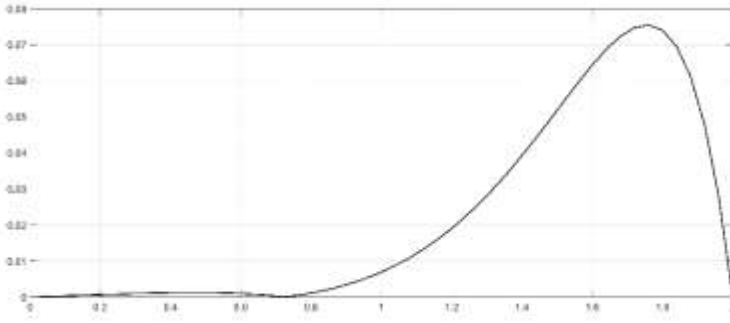
Şekil 6: Birinci durumda mutlak hata

**Durum 2:** Bu kısımda genel denklemin özel bir formu olarak verilen (4) denkleminin yaklaşık çözümü araştırılacaktır.  $[0,2]$  konum aralığı üzerinde elde edilen  $L_\infty$  hata normları ve yakınsama oranları Tablo 2 de verilmiştir. Tablo 2 incelendiğinde alt aralık sayısı arttığında  $L_\infty$  hata normlarının küçüldüğü ve yakınsaklık oranlarının ise önerilen yöntemin teorik doğruluğu olan 2 değerini hemen hemen aldığı görülmektedir.

Tablo 2: İkinci durumda bulunan  $L_\infty$  hata normları ve yakınsama oranları

$N$	$L_\infty$	YO	$N$	$L_\infty$	YO
20	$4.73 \times 10^{-1}$		40	$1.18 \times 10^{-1}$	2.00
25	$3.05 \times 10^{-1}$	1.96	45	$9.29 \times 10^{-2}$	2.04
30	$2.10 \times 10^{-1}$	2.05	50	$7.55 \times 10^{-2}$	1.97
35	$1.54 \times 10^{-1}$	2.00			

$N = 50$  alındığında bulunan mutlak hatanın grafiği ise Şekil 7 de verilmiştir. Şekil incelendiğinde maksimum hatanın Tablo 2 de bulunan değer ile uyumlu olduğu ve hatanın konum aralığının özellikle sağ kısmına yakın kısmında geldiği ama sağ uç kısmında olmadığı görülmektedir.



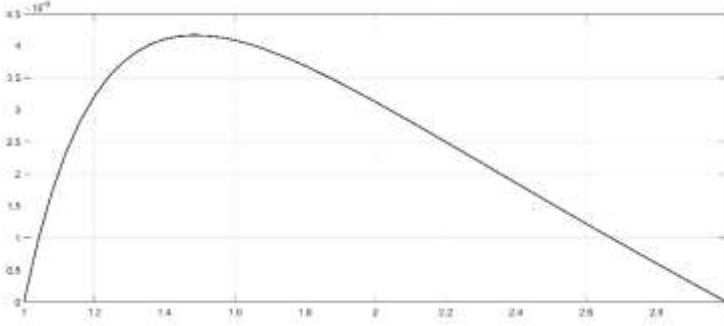
Şekil 7: İkinci durumda mutlak hata

**Durum 3:** Genel denklemin özel bir formu olarak verilen (6) denkleminin yaklaşık çözümünün araştırıldığı bu kısımda [1,3] konum aralığı üzerinde elde edilen  $L_\infty$  hata normları ve yakınsama oranları hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 3 de verilmiştir. Çizelge incelendiğinde alt aralık sayısı arttığında  $L_\infty$  hata normlarının küçüldüğü ve yakınsaklık oranlarının ise önerilen yöntemin teorik doğruluğu olan 2 değerini hemen hemen aldığı görülmektedir.

Tablo 3: Üçüncü durumda bulunan  $L_\infty$  hata normları ve yakınsama oranları

$N$	$L_\infty$	YO	$N$	$L_\infty$	YO
20	$2.59 \times 10^{-4}$		40	$6.50 \times 10^{-5}$	1.99
25	$1.66 \times 10^{-4}$	1.99	45	$5.14 \times 10^{-5}$	1.99
30	$1.15 \times 10^{-4}$	2.00	50	$4.16 \times 10^{-5}$	2.00
35	$8.48 \times 10^{-5}$	2.00			

Şekil 8 de ise  $N = 50$  alındığında bulunan mutlak hatanın grafiği verilmiştir. Şekil incelendiğinde maksimum hatanın Tablo 3 de bulunan değer ile uyumlu olduğu ve hatanın konum aralığının özellikle sol kısmına yakın kısmında geldiği ama sol uç kısmında olmadığı görülmektedir.



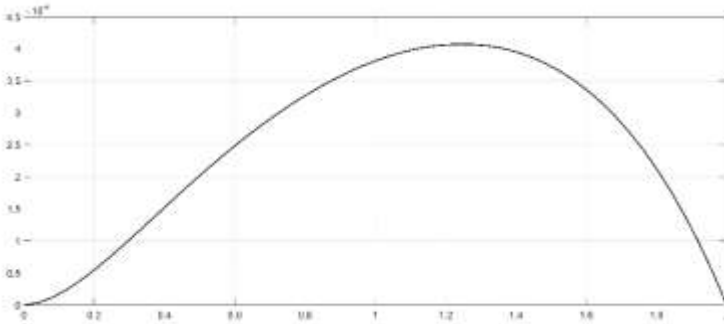
Şekil 8: Üçüncü durumda mutlak hata

**Durum 4:** Genel denklemin özel bir formu olarak verilen (8) denkleminin yaklaşık çözümünün araştırılacağı bu aşamada  $[0,2]$  konum aralığı üzerinde elde edilen  $L_\infty$  hata normları ve yakınsama oranları Tablo 4 de verilmiştir. Tablo 4 incelendiğinde alt aralık sayısı arttığında  $L_\infty$  hata normlarının küçüldüğü ve yakınsaklık oranlarının ise önerilen yöntemin teorik doğruluğu olan 2 değerini aldığı görülmektedir.

Tablo 4: Dördüncü durumda bulunan  $L_\infty$  hata normları ve yakınsama oranları

$N$	$L_\infty$	YO	$N$	$L_\infty$	YO
20	$2.53 \times 10^{-3}$		40	$6.34 \times 10^{-4}$	2.00
25	$1.62 \times 10^{-3}$	1.99	45	$5.02 \times 10^{-4}$	2.00
30	$1.13 \times 10^{-3}$	1.99	50	$4.07 \times 10^{-4}$	2.00
35	$8.30 \times 10^{-4}$	2.00			

Şekil 9 de ise  $N = 50$  alındığında bulunan mutlak hatanın grafiği verilmiştir. Şekil incelendiğinde diğer durumlarda olduğu gibi maksimum hatanın çizelgede verilen  $L_\infty$  hata normuyla uyumlu olduğu görülmüştür. Ayrıca maksimum hatanın konum aralığının orta kısımlarında geldiği görülmüştür.



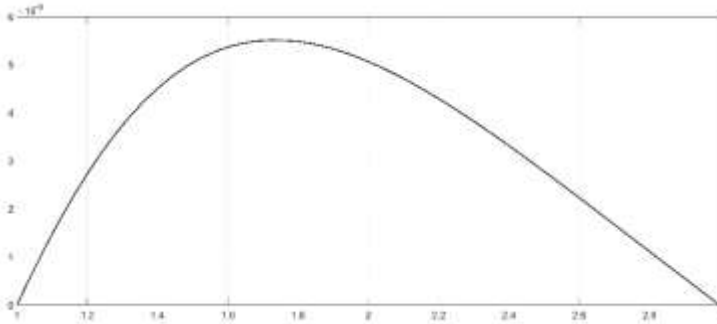
Şekil 9: Dördüncü durumda mutlak hata

**Durum 5:** Son olarak genel denklemin özel bir formu olarak verilen (10) denkleminin yaklaşık çözümünün araştırıldığı bu kısımda [1,3] konum aralığı üzerinde elde edilen  $L_\infty$  hata normları ve yakınsama oranları hesaplanmış ve sonuçlar Tablo 5 de verilmiştir. Çizelge incelendiğinde alt aralık sayısı arttığında diğer dört durumda olduğu gibi  $L_\infty$  hata normlarının küçüldüğü ve yakınsaklık oranlarının ise önerilen yöntemin teorik doğruluğu olan 2 değerini hemen hemen aldığı görülmektedir.

Tablo 5: Beşinci durumda bulunan  $L_\infty$  hata normları ve yakınsama oranları

$N$	$L_\infty$	YO	$N$	$L_\infty$	YO
20	$3.45 \times 10^{-4}$		40	$8.61 \times 10^{-3}$	2.00
25	$2.21 \times 10^{-4}$	2.00	45	$6.80 \times 10^{-3}$	2.00
30	$1.53 \times 10^{-4}$	2.00	50	$5.51 \times 10^{-3}$	2.00
35	$1.13 \times 10^{-4}$	2.00			

Şekil 10 da ise  $N = 50$  alındığında bulunan mutlak hatanın grafiği verilmiştir. Şekil incelendiğinde diğer durumlarda olduğu gibi maksimum hatanın çizelgede verilen  $L_\infty$  hata normuyla uyumlu olduğu görülmüştür. Ayrıca maksimum hatanın konum aralığının orta kısımlarında geldiği görülmüştür.



Şekil 10: Beşinci durumda mutlak hata

## SONUÇ

Bu çalışmada,  $[a, b]$  aralığında tanımlanan ve ikinci mertebeden genel formda bir adi diferansiyel denklem içeren sınır-değer problemlerinin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde ikinci mertebeden doğruluğa sahip sonlu fark yaklaşımlarından yararlanılmıştır. Önerilen yaklaşımın performansını ve doğruluk düzeyini değerlendirmek amacıyla, genel denklemden yer alan parametrelerin farklı biçimlerde seçilmesiyle oluşturulan ve analitik çözümleri bilinen beş ayrı alt problem üzerinde sayısal incelemeler gerçekleştirilmiştir. Elde edilen bulgular, hem birinci hem de ikinci türev terimleri için kullanılan sonlu fark şemalarının doğruluk

mertebeleriyle, yaklaşıık yöntemin sayısal yakınsama mertebelerinin uyumlu olduğunu göstermektedir. Bu doğrultuda, geliştirilen yöntemin ikinci mertebeden sınır-değer problemlerinin çözümlünde güvenilir ve etkin bir yaklaşım sunduğu sonucuna ulaşılmıştır.

## REFERANSLAR

- LeVeque, R. J.. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- Strikwerda, J. C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- Smith, G. D. Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods, Oxford, UK: Oxford University Press, 1985.
- Mitchell A. R. ve Griffiths D. F., The Finite Difference Method in Partial Differential Equations. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 1980.



## **2. Bölüm**

# **Atmosferik Sporlar ve Aerobiyolojik Çalışmalar**

**İsmühan POTOĞLU ERKARA<sup>1</sup>**

1- Prof. Dr; Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Fakültesi Biyoloji Bölümü. [ismuhan@ogu.edu.tr](mailto:ismuhan@ogu.edu.tr),  
ORCID No: 0000-0001-5780-4999

## ÖZET

Aerobioloji, atmosferde taşınan biyolojik partiküllerin (bakteri, mantar sporları, polenler ve virüsler) dağılımını, yoğunluğunu ve etkilerini inceleyen disiplinlerarası bir bilim dalıdır. Bu partiküller, hava akımları sayesinde yerel, bölgesel ve hatta kıtalararası mesafelere taşınabilmekte ve ulaştıkları ortamlarda ekolojik, ekonomik ve sağlıkla ilgili önemli sonuçlar doğurabilmektedir. Özellikle fungal sporlar, atmosferde yaygın olarak bulunan biyoaerosoller arasında yer almakta olup uygun çevresel koşullarda çoğalarak insan, hayvan ve bitkilerde çeşitli hastalıklara neden olabilmektedir.

Atmosferdeki fungal sporların dağılımı; sıcaklık, nem, yağış ve rüzgar gibi meteorolojik faktörlerden önemli ölçüde etkilenmektedir. Optimum sıcaklık koşulları spor üretimini artırırken, yoğun yağış atmosferdeki sporların azalmasına neden olabilmektedir. Rüzgar ise sporların farklı bölgelere taşınmasında önemli rol oynamaktadır. Bu nedenle aerobiolojik çalışmalar genellikle meteorolojik verilerle birlikte değerlendirilmekte ve bölgesel spor takvimleri oluşturulmaktadır.

Fungal sporlar insan sağlığı açısından özellikle solunum yolu hastalıklarıyla ilişkilidir. Astım, alerjik rinit ve diğer solunum yolu rahatsızlıkları, atmosferdeki spor konsantrasyonlarının artmasıyla tetiklenebilmektedir. Ayrıca bazı fungus türleri tarafından üretilen mikotoksinler, gıda güvenliği açısından da ciddi riskler oluşturmaktadır. Tarımsal açıdan değerlendirildiğinde ise fungal patojenler bitki hastalıklarının önemli bir kısmından sorumlu olup ürün verimini ve kalitesini düşürmektedir.

Bunun yanı sıra funguslar, depolama süreçlerinde gıdaların bozulmasına ve ekonomik kayıplara yol açarken, yapı materyalleri ve tarihi eserler üzerinde de biyolojik bozulmalara neden olabilmektedir. Tüm bu etkiler göz önüne alındığında, atmosferik biyoparçacıkların izlenmesi ve analiz edilmesi hem halk sağlığı hem de çevresel sürdürülebilirlik açısından büyük önem taşımaktadır. Bu nedenle aerobioloji alanında yapılacak kapsamlı ve disiplinlerarası çalışmalar, gelecekte oluşabilecek risklerin önceden belirlenmesi ve etkili önlemlerin geliştirilmesi açısından kritik bir rol oynamaktadır.

*Anahtar Kelimeler- Aerobioloji, atmosferik fungal sporlar, biyoaerosoller, meteorolojik faktörler, alerjik hastalıklar, bitki patojenleri, gıda güvenliği.*

---

# GİRİŞ

## 1. AEROBİYOLOJİNİN TANIMI VE ÖNEMİ

Aerobioloji, atmosferde bulunan ve hava akımları aracılığıyla taşınan biyolojik partiküllerin incelenmesini konu alan disiplinlerarası bir bilim dalıdır. Bu partiküller arasında bakteriler, mantar sporları, polenler, virüsler ve mikroskobik organizmalar yer almakta olup, bunların atmosferdeki varlığı yalnızca ekolojik süreçleri değil, aynı zamanda insan sağlığını, tarımsal üretimi ve ekonomik dengeleri doğrudan etkilemektedir. Atmosfer, bu organizmalar için yalnızca bir taşıyıcı ortam değil, aynı zamanda onların dağılımını, yoğunluğunu ve etki alanını belirleyen dinamik bir sistemdir.

Aerobiolojik araştırmaların önemi, bu biyolojik parçacıkların kıtalararası taşınabilme potansiyelinden kaynaklanmaktadır. Özellikle küreselleşen dünyada, hava yoluyla taşınan patojenlerin yeni bölgelere ulaşması, yerel ekosistemlerde dengesizliklere ve yeni hastalıkların ortaya çıkmasına neden olabilmektedir (Hart vd, 1993:91). Bu bağlamda aerobioloji; tıp, ziraat, veterinerlik, biyoloji, çevre bilimleri ve meteoroloji gibi birçok farklı disiplinin kesişim noktasında yer almakta ve multidisipliner bir yaklaşımı zorunlu kılmaktadır. Elde edilen veriler, hem bilimsel araştırmalara yön vermekte hem de halk sağlığı politikalarının oluşturulmasına katkı sağlamaktadır.

## 2. ATMOSFERİK FUNGUSLAR VE AEROMİKOLOJİ

Funguslar, spor üretimi yoluyla çoğalan ve bu sporları çevreye yayarak yaşam döngülerini sürdüren organizmalardır. Atmosferde bulunan fungal sporlar, çoğunlukla pasif olarak taşınmakta ve uygun çevresel koşulları bulduklarında yeni koloniler oluşturmaktadır. Bu nedenle atmosfer, fungal yayılım açısından kritik bir geçiş ortamı olarak değerlendirilmektedir.

Aeromikoloji, atmosferde bulunan mantar sporlarının tür çeşitliliğini, yoğunluğunu ve dağılımını inceleyen aerobiolojinin alt dalıdır. Bu alandaki çalışmalar, farklı coğrafi bölgelerdeki fungus topluluklarının karşılaştırılmasını mümkün kılmakta ve çevresel faktörlerin bu dağılım üzerindeki etkilerini ortaya koymaktadır (Ajikah vd, 2021: 5971). İklimsel değişkenlerin (sıcaklık, nem, yağış) ve coğrafi özelliklerin (rakım, bitki örtüsü, su kaynakları) farklılık göstermesi, her bölgede özgün bir fungal profil oluşmasına neden olmaktadır.

Aeromikolojik çalışmaların temel amacı yalnızca atmosferde

bulunan fungusları tanımlamak değil, aynı zamanda bu organizmaların potansiyel patojenlik özelliklerini ortaya koymaktır. Bu sayede insan, hayvan ve bitkilerde hastalığa neden olabilecek türlerin belirlenmesi ve bunların yayılım dinamiklerinin anlaşılması mümkün olmaktadır.

### **3. METEOROLOJİK FAKTÖRLERİN FUNGUS SPORLARI ÜZERİNE ETKİSİ**

Atmosferdeki fungal sporların dağılımı ve yoğunluğu büyük ölçüde meteorolojik faktörlere bağlıdır. Bu faktörler yalnızca sporların taşınmasını değil, aynı zamanda üretim süreçlerini ve atmosferde kalış sürelerini de doğrudan etkilemektedir (Batra vd, 2021; Guo vd, 2021:108258).

Sıcaklık, fungal gelişim ve spor üretimi üzerinde en belirleyici çevresel parametrelerden biridir. Optimum sıcaklık aralıklarında fungal metabolizma hızlanmakta ve spor üretimi artmaktadır. Ancak aşırı yüksek veya düşük sıcaklıklar, sporulasyon sürecini baskılayarak yalnızca daha önce üretilmiş sporların atmosferde bulunmasına neden olmaktadır. Bu durum, spor yoğunluğunda dalgalanmalara yol açmaktadır.

Nem ve yağış, sporların atmosferdeki varlığını farklı şekillerde etkilemektedir. Yüksek nem, bazı fungus türlerinin gelişimini destekleyebilirken, yoğun yağış sporların atmosferden uzaklaştırılmasına neden olan bir “yıkama etkisi” yaratmaktadır. Bu nedenle yağışlı dönemlerde spor konsantrasyonlarında belirgin azalmalar gözlenmektedir.

Rüzgar ise fungal sporların yayılımında kritik bir rol oynamaktadır. Özellikle hafif ve küçük yapıli sporlar, rüzgar akımlarıyla uzun mesafelere taşınabilmekte ve farklı ekosistemlere ulaşabilmektedir. Ancak rüzgar hızının spor yoğunluğu üzerindeki etkisi her zaman doğrusal değildir. Buna rağmen rüzgarın, farklı bölgelerden gelen sporların çeşitliliğini artırdığı kabul edilmektedir.

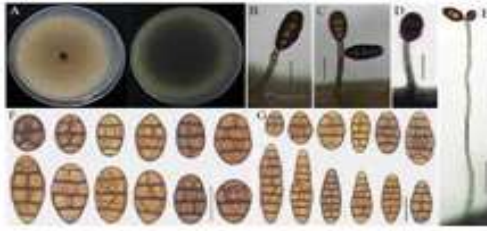
### **4. AEROBİYOLOJİK YÖNTEMLER**

Atmosferik fungal sporların belirlenmesi ve ölçülmesi amacıyla çeşitli metodolojik yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu yöntemler genel olarak gravimetrik ve volümetrik olmak üzere iki ana gruba ayrılmaktadır (Nageen vd, 2021:134).

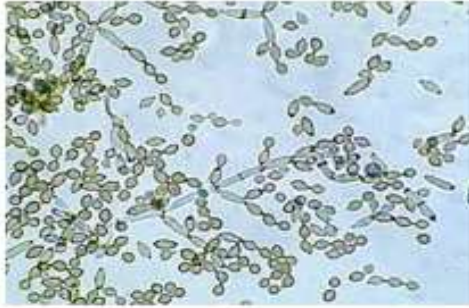
Gravimetrik yöntemler, sporların yerçekimi etkisiyle belirli yüzeylere çökmesine dayanmaktadır. Bu yöntemde petri kapları belirli sürelerle açık bırakılarak atmosferde bulunan sporların kültür ortamına

düşmesi sağlanır. Ayrıca Durham cihazı gibi araçlar kullanılarak daha kontrollü ölçümler yapılabilmektedir. Bu yöntemler basit ve düşük maliyetli olmalarına rağmen, yalnızca çöken partikülleri ölçmeleri nedeniyle sınırlı veri sunmaktadır.

Volümetrik yöntemler ise belirli bir hacimdeki havanın aktif olarak örneklenmesini esas alır. Bu yöntemlerde Burkard ve Lanzoni gibi cihazlar kullanılarak havadaki sporlar sürekli olarak toplanmakta ve zaman serisi verileri elde edilmektedir. Bu teknikler sayesinde spor yoğunluğunun gün içindeki ve mevsimsel değişimleri daha hassas bir şekilde analiz edilebilmektedir.



*Alternaria sp.*



*Cladosporium sp.*



*Ganoderma sp.*

## 5. FUNGUS SPORLARININ İNSAN SAĞLIĞI ÜZERİNE ETKİLERİ

Atmosferde bulunan fungal biyoaerosoller, insan sağlığı üzerinde önemli etkiler yaratmaktadır. Özellikle solunum yolu ile alınan sporlar, çeşitli alerjik ve enfeksiyöz hastalıkların ortaya çıkmasına neden olabilmektedir.

Fungal sporlar, astım ve alerjik rinit gibi hastalıkların tetikleyicileri arasında yer almaktadır. Bu sporların atmosferdeki konsantrasyonlarının artması, özellikle hassas bireylerde semptomların şiddetlenmesine yol açmaktadır (Çimen ve Öztürk, 2010:141; Marqu'es ve Domingo; 2022: 111930). Bunun yanı sıra sporların parçalanmasıyla oluşan hif fragmanları, daha küçük boyutları sayesinde akciğerlerin derin bölgelerine ulaşabilmekte ve daha ciddi solunum problemlerine neden olabilmektedir (Sham vd, 2021: 107626).

Funguslar ayrıca çeşitli toksik bileşikler üretmektedir. Mikotoksinler, aflatoksinler ve diğer fungal metabolitler hem solunum yoluyla hem de deri temasıyla insan sağlığını tehdit edebilir. Bu toksinler, bağışıklık sistemini zayıflatabilir, kronik hastalıkların gelişimine katkıda bulunabilir ve bazı durumlarda kanserojen etki gösterebilir.

## 6. HAYVANLAR ÜZERİNDEKİ ETKİLER

Fungal enfeksiyonlar yalnızca insanları değil, hayvan popülasyonlarını da ciddi şekilde etkilemektedir. Bu enfeksiyonlar, özellikle bağışıklık sistemi zayıf olan hayvanlarda ölümcül sonuçlara yol açabilmektedir (Varenik vd, 2021:326).

Zoonotik hastalıklar, hayvanlardan insanlara bulaşabilen fungal enfeksiyonları ifade etmektedir. Bu tür hastalıklar, doğrudan temas veya çevresel faktörler aracılığıyla yayılabilmektedir. Öte yandan bazı fungal patojenler, vahşi hayvan popülasyonlarında kitlesel ölümlere neden olarak ekosistem dengelerini bozabilmektedir.

Özellikle son yıllarda amfibilerde gözlenen chytridiomycosis gibi hastalıklar, fungal patojenlerin biyolojik çeşitlilik üzerindeki yıkıcı etkilerini açıkça ortaya koymaktadır. Bu durum, fungal hastalıkların yalnızca bireysel sağlık sorunu değil, aynı zamanda küresel bir ekolojik tehdit olduğunu göstermektedir.

## **7. BİTKİLER VE TARIM ÜZERİNDEKİ ETKİLER**

Funguslar, bitki hastalıklarının en önemli etkenlerinden biri olup tarımsal üretimde ciddi kayıplara neden olmaktadır. Bitki patojeni funguslar, bitkinin kök, gövde, yaprak ve meyve gibi farklı organlarını enfekte ederek gelişimini olumsuz yönde etkilemektedir (Elkoca, 2003: 367; Yücedağ ve Kaya, 2016: 67).

Bu hastalıklar arasında külleme, mildiyö, pas hastalıkları ve solgunluk gibi yaygın enfeksiyonlar yer almaktadır. Bu patojenler, bitkilerin fotosentez kapasitesini azaltmakta, büyümeyi engellemekte ve ürün kalitesini düşürmektedir.

Ekonomik açıdan değerlendirildiğinde, fungal hastalıklar dünya genelinde milyarlarca dolarlık kayıplara yol açmaktadır. Bu nedenle atmosferdeki fungal sporların izlenmesi, hastalıkların erken teşhisi ve uygun mücadele yöntemlerinin geliştirilmesi açısından büyük önem taşımaktadır.

## **8. GIDALAR ÜZERİNDEKİ ETKİLER**

Fungal kontaminasyon, hasat sonrası süreçlerde gıda güvenliğini tehdit eden en önemli faktörlerden biridir. Meyve ve sebzeler, depolama ve taşıma sırasında fungal enfeksiyonlara maruz kalarak hızla bozulabilmektedir.

Bu durum yalnızca ekonomik kayıplara değil, aynı zamanda insan sağlığı açısından risk oluşturan toksinlerin gıdalara bulaşmasına da neden olmaktadır. Özellikle mikotoksin üreten funguslar, gıda zinciri aracılığıyla insanlara ulaşarak ciddi sağlık sorunlarına yol açabilmektedir (Ortega-Rosas vd, 2021: 1761).

Gelişmekte olan ülkelerde, uygun depolama koşullarının sağlanamaması nedeniyle bu kayıpların oranı daha da artmaktadır. Bu nedenle fungal kontaminasyonun önlenmesi, gıda güvenliği politikalarının önemli bir parçasını oluşturmaktadır.

## **9. BİNALAR VE TARİHİ YAPILAR ÜZERİNDEKİ ETKİLER**

Funguslar, yalnızca canlı organizmalar üzerinde değil, aynı zamanda cansız yapı materyalleri üzerinde de tahrip edici etkilere sahiptir. Özellikle ahşap yapılar, fungal çürükçüller tarafından kolaylıkla zarar görebilmektedir (Rodrigues-Sola vd, 2022).

Taş, mermer ve beton gibi yüzeylerde gelişen funguslar ise estetik bozulmalara ve yapısal hasarlara neden olmaktadır. Bu organizmalar, yüzeyde renk değişimlerine, çatlaklara ve aşınmalara yol açarak yapıların dayanıklılığını azaltmaktadır.

Tarihi eserler açısından değerlendirildiğinde, fungal kolonizasyonun etkileri daha da kritik hale gelmektedir. Özellikle duvar resimleri ve süslemeler, fungal faaliyetler sonucu geri dönüşü olmayan zararlar görebilmektedir. Bu nedenle kültürel mirasın korunmasında aerobiyolojik veriler önemli bir rol oynamaktadır.

## 10. EKOLOJİK ROL VE ÖNEMİ

Funguslar, ekosistemlerin sürdürülebilirliği açısından vazgeçilmez organizmalardır. Organik maddelerin ayrıştırılması ve besin döngüsünün devamlılığının sağlanmasında temel rol oynamaktadırlar.

Saprotrofik faaliyetleri sayesinde ölü organik materyaller parçalanarak toprağa kazandırılmakta ve bu süreç bitki gelişimi için gerekli besin maddelerinin oluşmasını sağlamaktadır (Sarica vd, 2021: 1237). Bu yönleriyle funguslar, ekosistemin “geri dönüşüm sistemi” olarak tanımlanabilir.

Ancak bu faydalı rollerinin yanı sıra, patojen türlerin varlığı ekosistemlerde dengesizliklere yol açabilmektedir. Bu nedenle fungal çeşitliliğin ve ekolojik işlevlerin dengeli bir şekilde anlaşılması büyük önem taşımaktadır.

## 11. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Aerobiyolojik çalışmalar, atmosferde bulunan fungal sporların dağılımını, yoğunluğunu ve etkilerini anlamak açısından kritik bir bilimsel alan oluşturmaktadır. Bu çalışmalar sayesinde hem insan sağlığı hem de tarımsal üretim açısından önemli risk faktörleri belirlenebilmekte ve gerekli önlemler alınabilmektedir.

Bununla birlikte, fungal sporların üretim dinamikleri, taşınım mekanizmaları ve alerjenik özellikleri hakkında halen tam olarak açıklanamayan birçok unsur bulunmaktadır. Bu nedenle gelecekte yapılacak araştırmaların daha kapsamlı, disiplinlerarası ve teknolojik açıdan gelişmiş yöntemlerle yürütülmesi gerekmektedir.

Sonuç olarak aerobiyoloji, yalnızca akademik bir araştırma alanı

olmanın ötesinde, toplum sağlığı, gıda güvenliği ve çevresel sürdürülebilirlik açısından stratejik öneme sahip bir bilim dalıdır.

## KAYNAKLAR

Ajikah Linus Bashie, Frank Harald Neumann, Olugbenga Shadrak Alebiosu, Marion Bamford. Oluwatoyin Temitayo Ogundipe. (2021). Relevance of aerobiological studies in Nigeria: a two-year aerospora record of Lagos. *Aerobiologia* 37:597-613.

Batra Mehak, Don Vicendese, Edward Newbiggin, Katrina a Lambert, Mimi Tang, Michael J Abramson, Shyamali C Dharmage & Bircan Erbas (2021). The association between outdoor allergens – pollen, fungal spore season and high asthma admission days in children and adolescents, *International Journal of Environmental Health Research*, DOI: 10.1080/09603123.2021.1885633.

Çimen M, Öztürk S. (2010). Küresel Isınma, İklim Değişikliğinin Solunum Sistemi Üzerine Etkisi ve Büyükşehir Bronşiti. *F.Ü.Sağ.Bil.Tıp Derg.* 24 (2): 141-146.

Elkoca E. (2003). Hava Kirliliği ve Bitkiler Üzerindeki Etkileri. Atatürk Üniv. *Ziraat Fak. Derg.* 34 (4), 367-374.

Guo Kangqi, Hua Qian, Jin Ye, Fan Sun, Yang Zhuge, Shengqi Wang, Cong Liu, Guoqing Cao, Xiaohong Zheng. (2021). Assessment of airborne bacteria and fungi in different-type buildings in Nanjing, a hot summer and cold winter moist Chinese city. *Building and Environment* 205, 108258.

Hart K . M., Tremp J., Molnar E., and Giger W. Ea Wag. (1993). The Occurrence And The Fate Of Organic Pollutants In The Atmosphere. *Water, Air, and Soil Pollution* 68: 91-112.

Marqu`es Montse, Jos´e L. Domingo. (2022). Positive association between outdoor air pollution and the incidence and severity of COVID-19. A review of the recent scientific evidences. *Environmental Research* Volume 203, 111930.

Nageen, Y., Asemoloye, M.D., Pölme, S. *et al.* (2021). Analysis of culturable airborne fungi in outdoor environments in Tianjin, China. *BMC Microbiol* 21, 134.

Ortega-Rosas, C.I., Meza-Figueroa, D., Vidal-Solano, J.R. *et al.* (2021). Association of airborne particulate matter with pollen, fungal spores, and allergic symptoms in an arid urbanized area. *Environ Geochem Health* 43, 1761-1782.

Rodríguez-Solà, R., Casas-Castillo, M.C., Zhang, J.J.H. *et al.* (2022). A study on correlations between precipitation ETCCDI and airborne pollen/fungal spore parameters in the NE Iberian Peninsula. *Int J Biometeorol* <https://doi.org/10.1007/s00484-022-02267-5>.

Sarıca Seda Naz, Bodur Ayşe, Özden Üzmez Özlem, Malkoç Semra. (2021). Assessment of Airborne Bacteria and Fungi in Different Home Environments.

*European Journal of Science and Technology* Special Issue 28, pp. 1237-1245.

Sham Noraishah Mohammad, Nurul Izzah Ahmad, Muhammad Alfatih Pahrol, Yin-Hui Leong. (2021). Fungus and mycotoxins studies in hospital environment: A scoping review. *Building and Environment* Volume 193, 107626.

Varenik, A.V., Kalinskaya, D.V. and Myslina, M.A., (2021). Investigation of Airborne Particulate Matter in the Atmosphere of the Black Sea Coastal Zone Based on the Measured and Satellite Data. *Physical Oceanography*, [e-journal] 28(3), pp. 326-337.

Yücedağ C., Kaya L. G. (2016). Hava Kirleticilerin Bitkilere Etkileri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi* 7(1): 67-74.

