

MATEMATİK VE BİLGİSAYAR BİLİMLERİNDE ÖNCÜ VE YENİLİKÇİ ÇALIŞMALAR



All Sciences Academy

*MATEMATİK VE
BİLGİSAYAR BİLİMLERİNDE
ÖNCÜ VE YENİLİKÇİ
ÇALIŞMALAR*

Editör
Prof. Dr. Bülent SAKA





Matematik ve Bilgisayar Bilimlerinde Öncü ve Yenilikçi Çalışmalar

Editör: Prof. Dr. Bülent SAKA

Dizayn: All Sciences Academy Design

Basım Tarihi: Aralık 2024

Yayıncı Sertifika Numarası: 72273

ISBN: 978-625-5954-04-6

© All Sciences Academy

www.allsciencesacademy.com

allsciencesacademy@gmail.com

İÇERİK

1. Bölüm	6
Bazı Adi Diferansiyel Denklemlerin B-spline Sonlu Elemanlar Çözümü <i>Dursun IRK, Melis ZORŞAHİN</i>	
2. Bölüm	18
Arşimedyen Cisimler ve Minkowski Geometrilerin İlgisi Üzerine Bir Araştırma <i>Özcan GELİŞGEN</i>	
3. Bölüm	44
Gilson-Pickering Denkleminin Kuintik Trigonometrik B-spline Kolokasyon Yöntemiyle Nümerik Çözümü <i>Melis ZORŞAHİN, Dursun IRK</i>	
4. Bölüm	54
Katalan Cisimler ve Metrik Geometrilerin İlişkisine Dair Bir Araştırma <i>Özcan GELİŞGEN</i>	

Bazı Adi Diferansiyel Denklemlerin B-spline Sonlu Elemanlar Çözümü

Dursun IRK¹
Melis ZORŞAHİN²

- 1- Prof. Dr.; Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü.
dirk@ogu.edu.tr ORCID No: [0000-0002-3340-1578](https://orcid.org/0000-0002-3340-1578)
- 2- Doç. Dr.; Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü.
mzorsahin@ogu.edu.tr ORCID No: [0000-0001-7506-4162](https://orcid.org/0000-0001-7506-4162)

ÖZET

Spline fonksiyon, tanım aralığının içinde verilen bir dizi noktayı düzgün bir şekilde birleştiren genellikle parçalı olarak tanımlanan bir fonksiyondur. Parçaların birleşim noktalarında (düğümler veya kontrol noktaları olarak isimlendirilir) belirli bir mertebeye kadar türev sürekliliği sağlar. Spline fonksiyonlar eğri uydurma, veri interpolasyonu, bilgisayar grafikleri, mühendislik ve sayısal analiz gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. B-spline fonksiyonlar da spline fonksiyonlar ile aynı özelliklere sahiptir ve herhangi bir dereceye sahip bir spline fonksiyonu, aynı dereceye ait B-spline'ların lineer birleşimi olarak ifade edilirler. Bu çalışmada kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak ikinci mertebeden iki adet başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümü araştırılacaktır. Yöntem olarak ise oldukça popüler olan kolokasyon ve Galerkin yöntemleri kullanılacaktır.

Kolokasyon yönteminde diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü, bir dizi temel fonksiyonun (bu çalışmada kübik B-spline fonksiyonların) lineer kombinasyonu olarak ifade edilerek belirli kolokasyon noktalarında denklemin sağlayacak şekilde yaklaşık çözüm araştırılır. Hesaplama işlemi genellikle hızlıdır çünkü denklemin yaklaşık çözümü belirli sayıda nokta üzerinde çözülmeye çalışılır. Galerkin yönteminde ise diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü, hata fonksiyonunun (kalıntının) bir test fonksiyon uzayında ortogonal olmasını sağlayacak şekilde araştırılır. Kolokasyon yöntemine göre daha genel bir çözüm sağlar, çünkü diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü için tanım aralığının tamamı dikkate alınmaktadır.

Önerilen kübik B-spline kolokasyon ve Galerkin yöntemlerin doğruluğunu kontrol etmek için özel çözümleri bilinen ikinci mertebeden iki başlangıç değer problemi kullanılacaktır. Önerilen yöntemlerin uygulanması sonucunda bulunan hata grafikleri verilerek, bulunan yaklaşık sonuçlar birbirleri ve tam sonuçlar ile kıyaslanacaktır.

Anahtar Kelimeler – Adi Diferansiyel Denklemler; Sonlu Elemanlar Yöntemi; Galerkin Metodu; Kolokasyon Metodu; Kübik B-Spline Fonksiyonu.

GİRİŞ

Bu çalışmada

$$u'' + \varepsilon u = f(t), u(a) = \lambda_0, u(b) = \lambda_1 \quad (1)$$

olarak verilen 2. mertebeden diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü araştırılacaktır.

$[a, b]$ tanım aralığının düzgün bir parçalanışı

$$k = \frac{b - a}{N}$$

konum artım uzunluğu olmak üzere

$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b, t_m = t_{m-1} + k, m = 1, \dots, N$ olarak alınacaktır.

KÜBİK B-SPLİNE

Literatürde (Amlani vd., 2022; Dağ ve Saka, 2004; Esen ve Tasbozan, 2015; Gupta ve Kukreja, 2019; Hamad ve Sabawi, 2023; Iqbal vd., 2019 ve 2020; Karakoç ve Zeybek, 2016; Kutluay vd., 2016; Lubo ve Duressa, 2023; Mittal ve Jain, 2012; Sharifi ve Rashidinia, 2016; Yagmurlu vd., 2017; Zin 2016) sıklıkla kullanılan kübik B-spline fonksiyonları

$$\alpha_m = t - t_m$$

olmak üzere

$$C_m^3(t) = \frac{1}{k^3} \begin{cases} (\alpha_{m-3})^3 & , t_{m-2} \leq t < t_{m-1} \\ k^3 + 3k^2\alpha_{m-1} + 3k\alpha_{m-1}^2 - 3\alpha_{m-1}^3 & , t_{m-1} \leq t < t_m \\ k^3 - 3k^2\alpha_{m+1} + 3k\alpha_{m+1}^2 + 3\alpha_{m+1}^3 & , t_m \leq t < t_{m+1} \\ -\alpha_{m+2}^3 & , t_{m+1} \leq t < t_{m+2} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (2)$$

olarak ifade edilir. $[t_{m-2}, t_{m+2}]$ aralığında her bir $C_m^3(t)$ kübik B-spline fonksiyonu ardışık dört elemanı örtmektedir. Dolayısıyla her $[t_m, t_{m+1}]$ sonlu elemanı C_{m-1}^3 , C_m^3 , C_{m+1}^3 ve C_{m+2}^3 olarak dört kübik B-spline tarafından örtülmektedir. Kübik B-spline fonksiyonlarının ilk iki türevleri de $[t_{m-2}, t_{m+2}]$ aralığının dışında sıfırdır. Ayrıca $i = m-1, m, m+1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_i^+} C_m^3(t) &= \lim_{t \rightarrow t_i^-} C_m^3(t) \\ \lim_{t \rightarrow t_i^+} \frac{d}{dt} (C_m^3(t)) &= \lim_{t \rightarrow t_i^-} \frac{d}{dt} (C_m^3(t)) \\ \lim_{t \rightarrow t_i^+} \frac{d^2}{dt^2} (C_m^3(t)) &= \lim_{t \rightarrow t_i^-} \frac{d^2}{dt^2} (C_m^3(t)) \end{aligned}$$

olduğundan $C_m^3(t)$ kübik B-spline fonksiyonu ile ilk iki türevinin $[t_{m-2}, t_{m+2}]$ aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir.

Analitik çözüm için yaklaşık çözüm ise kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak

$$u(t) \approx U(t) = \sum_{i=-1}^{N+1} C_i^3(t) \rho_i \quad (3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada ρ_i katsayıları bilinmeyenler olmak üzere $C_i^3(t)$ fonksiyonları kübik B-spline fonksiyonlarını gösterir. $C_m^3(t)$ kübik B-spline fonksiyonlarının $[t_{m-2}, t_{m+2}]$ aralığının dışında sıfır olduğu ve $C_m^3(t)$ B-

spline fonksiyonlarının $[t_{m-2}, t_{m+2}]$ aralığında ardışık dört eleman örttüğü bilinmektedir. Dolayısıyla her bir $[t_m, t_{m+1}]$ sonlu elemanı C_{m-1}^3 , C_m^3 , C_{m+1}^3 ve C_{m+2}^3 olarak dört kübik B-spline tarafından örtüleceğinden (3) yaklaşımı

$$u(t) \approx U(t) = \sum_{i=m-1}^{m+2} C_i^3(t) \rho_i \quad (4)$$

$u(t) \approx C_{m-1}^3(t) \rho_{m-1} + C_m^3(t) \rho_m + C_{m+1}^3(t) \rho_{m+1} + C_{m+2}^3(t) \rho_{m+2}$ olacaktır. Bu yaklaşımda (2) kübik B-spline eşitliklerinin kullanılmasıyla t_m noktasındaki $u(t_m)$ için ve birinci-ikinci türevi için yaklaşımlar,

$$\begin{aligned} U(t_m, t) = U_m &= \sum_{i=m-1}^{m+2} C_i^3(t_m) \rho_i \\ \frac{dU(t_m, t)}{dt} = U'_m &= \sum_{i=m-1}^{m+2} \frac{dC_i^3(t_m)}{dt} \rho_i \\ \frac{d^2U(t_m, t)}{dt^2} = U''_m &= \sum_{i=m-1}^{m+2} \frac{d^2C_i^3(t_m)}{dt^2} \rho_i \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} U_m &= \rho_{m-1} + 4\rho_m + \rho_{m+1} \\ U'_m &= \frac{3}{k} (-\rho_{m-1} + \rho_{m+1}) \\ U''_m &= \frac{6}{k^2} (\rho_{m-1} - 2\rho_m + \rho_{m+1}) \end{aligned} \quad (5)$$

eşitlikleri bulunur.

KÜBİK B-SPLİNE KOLOKASYON METODU

Yaklaşık çözümü aranılan denklemde $x = x_m, m = 0, 1, \dots, N$ için kübik B-spline eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} U''_m + \varepsilon U_m &= f(t_m) \\ \frac{6}{k^2} (\rho_{m-1} - 2\rho_m + \rho_{m+1}) + \varepsilon (\rho_{m-1} + 4\rho_m + \rho_{m+1}) &= f(t_m) \end{aligned}$$

elde edilir. Denklem düzenlenirse

$$\rho_{m-1} \left(\frac{6}{k^2} + \varepsilon \right) + \rho_m \left(-\frac{12}{k^2} + 4\varepsilon \right) + \rho_{m+1} \left(\frac{6}{k^2} + \varepsilon \right) = f(t_m)$$

bulunur. Böylece $m = 0, 1, \dots, N$ için $N + 1$ denklem $N + 3$ bilinmeyenden oluşan bir sistem elde edilir.

$$U(a) = \lambda_0$$

$$U(b) = \lambda_1$$

olarak ilave iki şart sisteme eklenirse

$$\gamma_1 = \frac{6}{k^2} + \varepsilon$$

$$\gamma_2 = -\frac{12}{k^2} + 4\varepsilon$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\rho_{-1} + 4\rho_0 + \rho_1 &= \lambda_0 \\ \gamma_1\rho_{-1} + \gamma_2\rho_0 + \gamma_1\rho_1 &= f(t_0) \\ \gamma_1\rho_0 + \gamma_2\rho_1 + \gamma_1\rho_2 &= f(t_1) \\ &\vdots \\ \gamma_1\rho_{N-1} + \gamma_2\rho_N + \gamma_1\rho_{N+1} &= f(t_N) \\ \rho_{N-1} + 4\rho_N + \rho_{N+1} &= \lambda_1\end{aligned}$$

olarak $N + 3$ bilinmeyen ve $N + 3$ denklemden oluşan sistem elde edilir. Denklem sistemi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho} &= (\rho_{-1}, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N, \rho_{N+1})^T \\ B &= (\lambda_0, f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_N), \lambda_1)^T\end{aligned}$$

olmak üzere

$$A\boldsymbol{\rho} = B \quad (6)$$

olarak matris formunda da yazılabilir.

KÜBİK B-SPLİNE GALERKİN METODU

$0 \leq \xi \leq k$ ve $\xi = t - t_m$ dönüşümü yardımıyla $[t_m, t_{m+1}]$ sonlu eleman üzerindeki şekil fonksiyonları, gerekli işlemlerin yapılması sonucunda yerel koordinat sisteminde

$$\varphi_{m-1}(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{k}\right)^3, \quad (7)$$

$$\varphi_m(\xi) = 4 - 6\frac{\xi^2}{k^2} + 3\frac{\xi^3}{k^3} \quad (8)$$

$$\varphi_{m+1}(\xi) = 1 + 3\frac{\xi}{k} + 3\frac{\xi^2}{k^2} - 3\frac{\xi^3}{k^3} \quad (9)$$

$$\varphi_{m+2}(\xi) = \frac{\xi^3}{k^3} \quad (10)$$

olarak elde edilebilir.

$$u'' + \varepsilon u = f(t)$$

denklemini $W(t)$ ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak konum aralığı üzerinde integrali alınır

$$\int_a^b W(t)(u'' + \varepsilon u) dt = \int_a^b W(t)f(t) dt$$

elde edilir. Ağırlıklı rezidü metotlarından olan Galerkin metodunda ağırlık fonksiyonu için de taban fonksiyonları seçilir. Dolayısıyla $[t_m, t_{m+1}]$ aralığı üzerinde $W(t)$ ağırlık fonksiyonu, u ve u'' yerine kübik B-Spline fonksiyonları kullanılacaktır.

Bu durumda $[t_m, t_{m+1}]$ aralığı üzerinde $\xi = t - t_m$, $0 \leq \xi \leq k$ lokal koordinat dönüşümü yapılır

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\int_0^k (\varphi_i \varphi_j'' + \varepsilon \varphi_i \varphi_j) d\xi \right] \rho_j = \int_0^k (\varphi_i f(\xi + t_m) d\xi,$$

$$i = m-1, m, m+1, m+2$$

elde edilir.

$$A_{i,j}^e = \int_0^k \varphi_i \varphi_j'' d\xi,$$

$$C_{i,j}^e = \int_0^k \varphi_i \varphi_j d\xi,$$

$$g(m) = \int_0^k (\varphi_i f(\xi + t_m) d\xi$$

ve $m = 0, 1, \dots, N-1$ için

$$\boldsymbol{\rho}^e = (\rho_{m-1}^n, \dots, \rho_{m+2}^n)^T$$

olmak üzere

$$[\mathbf{A}^e + \varepsilon \mathbf{C}^e] \boldsymbol{\rho}^e - \mathbf{g}(m)$$

olarak tanım aralığı üzerindeki her bir alt aralıktaki yaklaşım bulunur. $\mathbf{A}^e$, $\mathbf{C}^e$ eleman matrislerinin birbirlerine eklenmesi sonucunda,

$$\boldsymbol{\rho} = (\rho_{-1}, \rho_0, \dots, \rho_{N+1})^T$$

olmak üzere

$$[\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{C}] \boldsymbol{\rho} = \mathbf{g}(m)$$

elde edilir. Elde edilen denklem sisteminin denklem ve bilinmeyen sayısı eşit olup $N+3$ tür. Denklem sistemi ayrıca seyrek bir matris olup bir satırında en fazla 7 tane sıfır olmayan değer içermektedir.

$$U(a) = \lambda_0, \quad U(b) = \lambda_1$$

sınır şartları sisteme ilk ve son denklemler silinerek uygulanabilir. Böylece denklem sistemi $N+1$ bilinmeyen $N+1$ denklemden oluşan bir sisteme dönüşür.

TEST PROBLEMLERİ

Bu bölümde denklemdeki parametrelerin seçimlerine göre bulunan iki farklı denklemin yaklaşık çözümleri elde edilecek ve sonuçlar tartışılacaktır. Elde edilen sonuçları kıyaslayabilmek için

$$L_{\infty} = |u_{\text{tam}} - U_{\text{yaklaşık}}|_{\infty} = \max_m |(u_m)_{\text{tam}} - (U_m)_{\text{yaklaşık}}| \quad (11)$$

hata normu kullanılacaktır. Kullanılacak hata normu bölünme noktaları için elde edilen mutlak hataların maksimumuna karşılık gelmektedir.

Test Problemi 1

$a = 0, b = 1, \varepsilon = -4, f(t) = te^{2t}$ ve $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ alındığında diferansiyel denklem

$$u'' - 4u = te^{2t}, u(0) = u(1) = 0$$

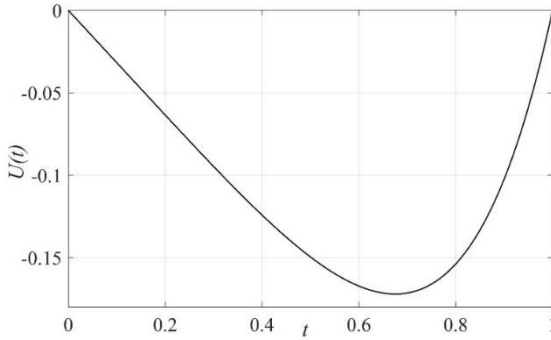
olacaktır. Denklemin verilen şartları sağlayan özel çözümü ise

$$c_1 = -\frac{e^2}{16(e^{-2} - e^2)}, c_2 = \frac{e^2}{16(e^{-2} - e^2)}$$

olmak üzere

$$u = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} + e^{2t} \left(\frac{1}{8} t^2 - \frac{1}{16} t \right) \quad (12)$$

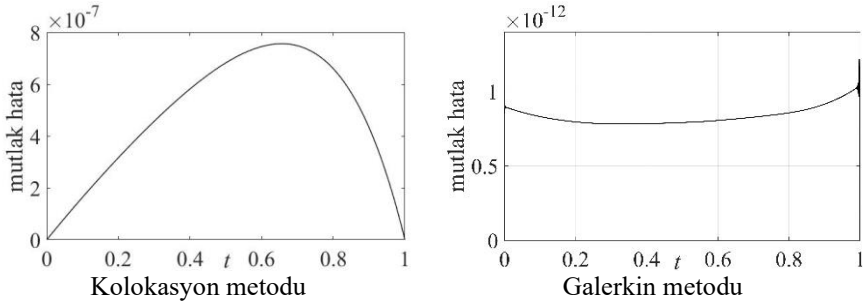
olarak bulunur. Bulunan özel çözüm şekilsel olarak Şekil 1’de verilmiştir.



Şekil 1: $[0,1]$ aralığında özel çözümün grafiği

Kolokasyon ve Galerkin yöntemlerinin doğruluğunu kontrol edebilmek için $[0,1]$ konum aralığı sırasıyla 5, 10, 20, 50, 100, 200 ve 500 eşit parçaya bölünerek her iki yöntem çalıştırılmış ve bulunan mutlak hatalar Tablo 1’de verilmiştir. Tablodan görüldüğü gibi konum artım uzunluğu küçüldükçe her iki yöntem içinde hatalar küçülmüştür. Kübik Galerkin yöntemi kullanıldığında bulunan hatalar ise kübik kolokasyon kullanıldığında bulunan hatalara göre daha düşük kalmıştır. $k = 0.002$ seçimi sonucunda bulunan hatanın mutlak değeri ise konum aralığı üzerinde Şekil 2’de her iki metot içinde çizilmiştir. Tablo 1 de $k = 0.002$ için elde edilen maksimum hatalar ile Şekil 2 de bulunan maksimum hataların uyumlu olduğu da

görülebilir.



Şekil 2: [0,1] aralığında mutlak hatalar

Tablo 1: Farklı konum artım değerleri için mutlak hatalar

k	N	Kübik Kolokasyon	Kübik Galerkin
		L_{∞}	L_{∞}
0.2	5	7.66×10^{-3}	7.41×10^{-5}
0.1	10	1.88×10^{-3}	5.92×10^{-6}
0.05	20	4.73×10^{-4}	4.19×10^{-7}
0.02	50	7.56×10^{-5}	1.16×10^{-8}
0.01	100	1.89×10^{-5}	7.43×10^{-10}
0.005	200	4.73×10^{-6}	4.70×10^{-11}
0.002	500	7.56×10^{-7}	1.22×10^{-12}

Test Problemi 2

$a = 0, b = 2, \quad \varepsilon = 4, \quad f(t) = \sin^2(t) \quad \text{ve} \quad \lambda_0 = 1, \lambda_1 = -1$
alındığında diferansiyel denklem

$$u'' + 4u = \sin^2(t), u(0) = 1, u(1) = -1$$

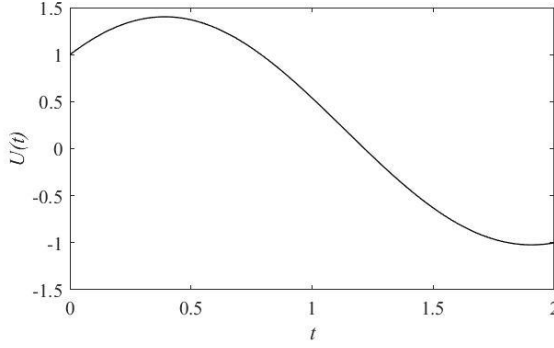
olacaktır. Denklemin verilen şartları sağlayan özel çözümü ise

$$c_1 = -\frac{29}{32}, c_2 = \frac{-9 - 7 \cos(2) + \sin(2)}{8 \sin(2)}$$

olmak üzere

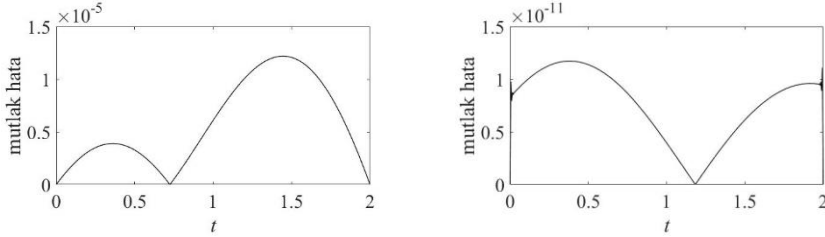
$$u = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + \frac{1}{8} - \frac{\cos(2t)}{32} - \frac{t \sin(2t)}{8}$$

olarak bulunur. 2. test probleminden bulunan özel çözüm şekilsel olarak çizilerek Şekil 3'de verilmiştir.



Şekil 3: $[0,2]$ aralığında özel çözümün grafiği

2. test problemi kullanılarak kolokasyon ve Galerkin yöntemlerinin doğruluğu kontrol edilirken $[0,2]$ konum aralığı sırasıyla 5, 10, 20, 50, 100 ve 200 eşit parçaya bölünerek önerilen her iki yöntem çalıştırılmıştır. Elde edilen mutlak hatalar Tablo 2’de verilmiştir. Tablodan görüldüğü gibi konum artım uzunluğu küçüldükçe her iki yöntem içinde ilk test probleminde olduğu gibi hatalar küçülmüş ve kübik Galerkin yöntemi kullanıldığında daha düşük hatalar elde edilmiştir. $k = 0.005$ diğer bir ifadeyle konum aralığının 200 eşit parçaya bölünmesi sonucunda bulunan hatanın mutlak değeri konum aralığı üzerinde Şekil 4’de her iki metot içinde çizilmiştir. $k = 0.005$ için Tablo 2 de elde edilen maksimum hatalar ile Şekil 4 de bulunan maksimum hataların uyumlu olduğu görülebilir.



Kolokasyon metodu

Galerkin Metodu

Şekil 4: $[0,2]$ aralığında mutlak hatalar

Tablo 2: Farklı konum artım değerleri için mutlak hatalar

k	N	Kübik Kolokasyon	Kübik Galerkin
		L_{∞}	L_{∞}
0.2	5	1.92×10^{-2}	3.07×10^{-5}
0.1	10	4.83×10^{-3}	1.88×10^{-6}
0.05	20	1.22×10^{-3}	1.17×10^{-7}
0.02	50	1.95×10^{-4}	2.98×10^{-9}
0.01	100	4.88×10^{-5}	1.86×10^{-10}
0.005	200	1.22×10^{-5}	1.17×10^{-11}

SONUÇ

Bu çalışmada kübik B-spline fonksiyonlar kullanılarak 2. mertebeden bir adi diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü araştırılmıştır. (1) denkleminin yaklaşık çözümünü elde edebilmek için iyi bilinen iki sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemler kübik B-spline taban fonksiyonlarına bağlı kolokasyon ve Galerkin yöntemleridir.

Önerilen iki yöntemle elde edilen yaklaşık çözümlerin doğruluğunu ölçebilmek için iki test problemi ele alınmıştır. Her iki probleme ait sonuçlar şekiller ve tablolar verilerek karşılaştırılmıştır. Test problemleri dikkate alındığında Galerkin metodunun kolokasyon yöntemine göre yaklaşık çözüm elde etmede daha iyi sonuçlar verdiği açıkça görülmüştür.

REFERANSLAR

- Amlani, K., Kumar, M. ve Shukla, A. (2022). Cubic b-spline collocation method for coupled system of ordinary differential equations with various boundary conditions. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 12(1), 11.
- Dağ, İ. ve Saka, B. (2004). A Cubic B-Spline Collocation Method for the EW Equation. *Mathematical and Computational Applications*, 9(3), 381-392.
- Esen, A. ve Tasbozan, O. (2015). Cubic B-spline collocation method for solving time fractional gas dynamics equation. *Tbilisi Mathematical Journal*, 8(2), 221-231.
- Gupta, B. ve Kukreja, V. K. (2019). Numerical approach for solving diffusion problems using cubic B-spline collocation method. *Applied Mathematics and Computation*, 219(4), 2087-2099.
- Hamad, H. Q. ve Sabawi, Y. A. (2023). Numerical Solution of the Heat Equation by Cubic B-spline Collocation Method. *Eurasian Journal of Science and Engineering*, 9(2), 252-261.
- Iqbal, A., Hamid, N. N. A. ve Ismail, A. I. Md. (2019). Soliton Solution of Schrödinger Equation Using Cubic B-Spline Galerkin Method. *Fluids*, 4(2), 108.
- Iqbal, A., Hamid, N. N. A. ve Ismail, A. I. Md. (2020). Cubic B-spline Galerkin method for numerical solution of the coupled nonlinear Schrödinger equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 174, 32-44.
- Karakoç, S. B. G. ve Zeybek, H. (2016). A cubic B-spline Galerkin approach for the numerical simulation of the GEW equation. *Statistics, Optimization & Information Computing*, 4(1), 30-41.
- Kutluay, S., Ucar, Y. ve Yagmurlu, N. M. (2016). Numerical Solutions of the Modified Burgers Equation by a Cubic B-spline Collocation Method. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 39, 1603-1614.
- Lubo, G. T. ve Duressa, G. F. (2023). Cubic B-spline finite element method for generalized reaction-diffusion equation with delay. *Sigma*, 41(2), 256-65.
- Mittal, R.C. ve Jain, R.K. (2012). Cubic B-splines collocation method for solving nonlinear parabolic partial differential equations with Neumann boundary conditions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(12), 4616-4625.
- Sharifi, S. ve Rashidinia, J. (2016). Numerical solution of hyperbolic telegraph

- equation by cubic B-spline collocation method, *Applied Mathematics and Computation*, 281(2016), 28-38.
- Yagmurlu, N. M., Karaagac, B. ve Kutluay, S. (2017). Numerical solutions of Rosenau-RLW equation using Galerkin cubic B-spline finite element method. *American Journal of Computational and Applied Mathematics*, 7(1), 1-10.
- Zin, S. M. (2016). B-Spline Collocation Approach for solving Partial Differential Equations (Doctoral dissertation, Universiti Sains Malaysia).

Arşimedyan Cisimler ve Minkowski Geometrilerin İlgisi Üzerine Bir Araştırma

Özcan GELİŞGEN¹

1- Prof. Dr.; Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü. gelisgen@ogu.edu.tr ORCID No: 0000-0001-7071-6758

ÖZET

Bu bölümde insanlık tarihi kadar kadim bir araştırma çalışma alanı geometrinin ilginç ve dikkat çeken çalışma alanlarından ikisi olan çokyüzlüler ile metrik geometriler ele alınmıştır. Buna göre, bahsi geçen alanlardan ilk ele alınanının konusu binlerce yıllardır insanların ilgisi çeken 3- boyutlu uzayda yer yaşam alınan sahip olan geometrik şekillerden çokyüzlülerin güzel ve enteresan bir sınıfı olan Arşimedyen cisimlerdir. İkinci ele alınan alanın konusu ise çokyüzlülere nispeten çok çok daha yeni olup ancak bir asıra dayanan bir maziye sahip olan metrik geometriler konusudur. Özelliklerde son yıllarda yoğunlaşan çalışmalar ile bu iki alanın kesişimin de yer alan konulara dair çalışmaların sıklaştığı gözükmemektedir. Buna göre bu bahsi geçen konuyla ilgili çalışmalardan yola çıkarak, Arşimedyen cisimleri küre kabul edecek şekilde metriklerin dolayısıyla bu metrikler ile oluşturulan metrik geometrilerin varlıkları araştırılmış ve daha sonrasında ilgili metrik uzayların sağladığı bir takım geometrik özellikler incelenmiştir. Son olarak da Felix Klein'in geometri tanımına uygun olarak bir kümenin kendi üzerine olacak şekilde bazı dönüşümler altında değişmez kalan özelliklerin incelenmesi tanımına uygun olarak oluşturulan ilgili metrik uzaylarda uzaklık koruyan dönüşümler yani izometrilere incelenerek dönüşümler tespit edilmiştir. Sonrasında ise ilgili uzayların izometri grubunun 3-boyutlu analitik uzayda bilinen Öklidyen ötelemeler grubu ile söz konusu Arşimedyen cisimin simetri grubunun yarı direkt çarpımı olduğu ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler – Çokyüzlü; Arşimedyen Çokyüzlüler; Metrik; Metrik Geometri; İzometri Grubu.

ARŞİMEDYAN CİSİMLER

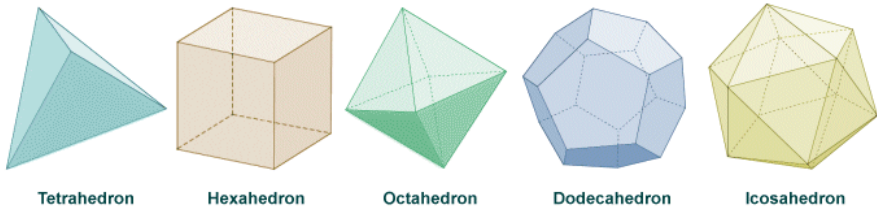
İnsanın yeryüzünde var olmasından buna geçen süreç boyunca insanın kafasında meşguliyet oluşturan matematiğe dair iki temel alan geometri ve aritmetiktir. Bir başka deyişle geometri geçmişi de insanlık tarihi kadar kadimdir. İlk zamanlarda geometri denilince insanlık görüp algılayabildiği ve bunun yanı sıra kullandığı şekiller ile ilgilenmiştir. Öncelikli olarak 2-boyutlu yapılar üçgen, dörtgen vb. gibi yapılar ve bunların mükemmelleşmiş hali olan çember ile ilgilenmiş sonralar da boyut arttırarak 3-boyutlu uzayda yer alan şekiller ile ilgilenmeye başlamıştır. Bu bağlamda bu kavramlara dair milattan önceki yıllardan kalma bazı tablet ve yazıtlarda 3-boyutlu şekillere dair çeşitli bilgi ve işaretler (atıflar) söz konudur.

Çokyüzlü nedir? Sorunun kendisi son derece kısa olmasına rağmen cevap oldukça uzundur. Çokyüzlü Krallığını daha önce hiç duymamış olabilirsiniz ancak hayvan, mineral ve bitki krallıkları kadar geniş ve çeşitlidir

ve dahası üçünü de kapsar denilebilir. Bu krallık da aristokratlar ve işçiler, aileler ve bireyler, uzun ve ilginç geçmişlere sahip eski çokyüzlüler ve dün veya önceki gün doğmuş genç çokyüzlüler vardır. Bu krallıkta dolaşırken çokyüzlü mimarinin yürüyüş turuna çıkabilir, bir doğa koruma alanını, bir sanat galerisini ve zanaatkarların çokyüzlüler fuarını ziyaret edebilirsiniz. Yürürken dört boyutlu uzaydan çokyüzlü hayaletler bile görmeniz mümkündür. Çokyüzlü Krallığı'nın sınırları tartışmalıdır (tıpkı birçok krallığın sınırları gibi) ancak sınır bölgelerini ziyaret etmek güvenlidir.

Çokyüzlü Krallığın dili matematiktir ancak bu kısa ilk ziyaret için üç önemli kelimeyi öğrenirseniz idare edebilirsiniz, bu üç kavram yüz, kenar ve köşedir. Çokyüzlü kelimesi Yunanca "çok" ve Hint-Avrupa dilinde "koltuk" kelimelerinden gelmektedir. Geometri uzmanlarına göre, çok sayıda yüzü olan bir nesne anlamına gelir. Bizim amaçlarımız için bir çokyüzlünün yüzleri, yüzeyinin oluşturulduğu çokgenlerdir. Bir çokyüzlünün kenarları, yüzlerini sınırlayan doğru parçaları; köşeler ise üç veya daha fazla yüzün (ve dolayısıyla üç veya daha fazla kenarın) birleştiği noktalarlardır.

Bu çokyüzlülerin her birinin, tüm yüzlerinin özdeş düzgün çokgenler ve her köşede aynı sayıda çokgen birleşmesi şeklindeki çok özel olan bu özelliklerinden dolayı düzenli adı verilir. Bu düzenlilik özelliğine sahip olan çokyüzlüler oluşturulmaya çalışıldığında beş tane oldukları anlaşılmıştır. Bu katı cisimler Platonik cisimler olarak bilinen tetrahedron (düzgün dörtyüzlü), hexahedron (düzgün altıyüzlü), octahedron (düzgün sekizyüzlü), dodecahedron (düzgün onikiyüzlü) ve icosahedron (düzgün yirmiyüzlü) dur. Aşağıdaki Şekil 1 de bahsi geçen Platonik cisimler görülmektedir.



Şekil 1: Platonik cisimler

Platonik katılar antik çağlardan beri bilinmektedir. İskoçya'nın geç Neolitik insanları tarafından yaratılan belirli oyma taş kürelerin bu şekilleri temsil ettiği öne sürülmüş olmasına rağmen ilgili kürelerin çok yüzlü olmaktan ziyade yuvarlak yumruları mevcut olup bu yumruların sayıları da genellikle Platonik katıların köşe sayılarından farklıdır, hatta yumruların dizilimi her zaman simetrik değildir. Antik Yunanlılar Platonik katıları kapsamlı bir şekilde incelemişlerdir. Bazı kaynaklar bu çokyüzlülerin

keşiflerini Pisagor'a atfederken, bazı kaynaklar ise, onun yalnızca tetrahedron, hexahedron ve dodecahedrona aşina olabileceğini ve octahedron ve icosahedronun keşfinin Platon'un çağdaşı olan Theaetetus'a ait olduğunu ifade etmektedir. Platonik cisimler, isim babası olan Platon'un felsefesinde oldukça belirgindir. Platon, MÖ 360 civarında Timaeus diyalogunda bunlardan bahsetti ve burada dört klasik elementin her birini (toprak, hava, su ve ateş) düzenli bir katıyla ilişkilendirdi. Buna göre Toprak hexahedron ile hava octahedronla, su icosahedronla ve ateş tetrahedronla ilişkilendirildi. Platon, beşinci Platonik cisim olan dodecahedron hakkında belirsiz bir şekilde "...tanrı onu tüm gökyüzündeki takımyıldızları düzenlemek için kullandı" dedi.

Plato okullarında yetiştirdiği düşünülen Öklid yazdığı unutulmaz eseri Elementler' de Platon'un katı cisimlerini matematiksel olarak tamamen tanımlamış ve Elementlerin son cildini (Kitap XIII) bu cisimlerin özelliklerine ayırmıştır ve üstelik bunların dışında başka düzgün bir cisimin olmadığı da ortaya koymuştur.

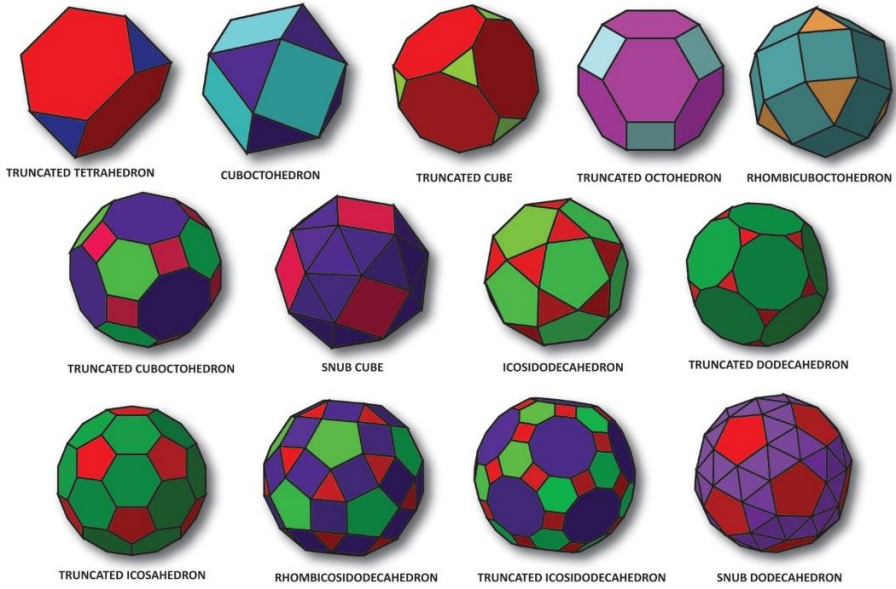
16. yüzyılda, Alman astronom Johannes Kepler, o zamanlar bilinen beş dünya dışı gezegeni beş Platon'un katı cismi ile ilişkilendirmeye çalıştı. 1596'da yayımlanan *Mysterium Cosmographicum*'da Kepler, beş katının birbirinin içine yerleştirildiği ve bir dizi yazılı ve sınırlanmış küre ile ayrıldığı bir Güneş Sistemi modeli önerdi. Kepler, o dönemde bilinen altı gezegen arasındaki mesafe ilişkilerinin, Satürn'ün yörüngesini temsil eden bir küre içinde bulunan beş Platonik katı açısından anlaşılabilirliğini öne sürmüş olsa da sonrasında Kepler'in ortaya attığı orijinal fikir terk edilmek zorunda kaldı. Ancak bu süreçte gerçekleştirilen araştırmalardan yörünge dinamiğinin üç yasası çıktı, bunlardan ilki gezegenlerin yörüngelerinin dairelerden ziyade elipsler olmasıydı ve bu da fiziğin ve astronominin gidişatını değiştirdi.

Arşimet cisimleri, yüzleri düzgün çokgenler olan, ancak hepsi birbirine benzemeyen ve köşeleri birbirine simetrik olan on üç dışbükey çokyüzlüden oluşan bir kümedir. Cisimler, Arşimet'in adını almıştır, ancak Arşimet bunlara itibar etmemiştir. Düzgün çokyüzlüler sınıfına, düzgün yüzlere ve simetrik köşelere sahip çokyüzlülere aittirler. Bazı Arşimet cisimleri Rönesans döneminde sanatçıların ve matematikçilerin eserlerinde tasvir edilmiştir. Arşimet cisimlerinin adları, bunları artık kayıp bir çalışmada ele alan Antik Yunan matematikçi Arşimet'ten alınmıştır. Bunlar başlangıçta Arşimet'e atfedilmemiş olsa da, İskenderiyeli Pappus, Synagoge adlı derlemesinin beşinci bölümünde Arşimet'in on üç çokyüzlü sıraladığını ve bunları her türden kaç yüze sahip oldukları açısından kısaca tanımladığını belirtmiştir.

Rönesans döneminde sanatçılar ve matematikçiler yüksek simetriye sahip saf formlara değer vermişlerdir. Bazı Arşimet cisimleri, Arşimet'in

eserlerini inceleme ve kopyalama girişiminde bulunan ve Arşimet'e atıflar içeren Piero della Francesca'nın *De quinque corporibus regularibus* adlı eserinde ortaya çıktı. Ancak, o bu şekilleri Arşimet'e atfetmedi ve Arşimet'in çalışmalarını bilmedi, bunun yerine bağımsız bir yeniden keşif gibi göründü. Cisimlerin diğer görünümleri Wenzel Jamnitzer'in *Perspectiva Corporum Regularium* adlı eserlerinde ve Leonardo da Vinci tarafından çizilen Luca Pacioli'nin hem *Summa de arithmetica* hem de *Divina razione* adlı eserlerinde ortaya çıktı. Arşimet cisimlerinin, Pacioli'nin eserinden kopyalanan Albrecht Dürer'in *Underweysung der Messung* adlı eserinde ortaya çıktı.

Arşimet cisimleri, köşe konfigürasyonuna ve oldukça simetrik özelliklere sahiptir. Köşe konfigürasyonu, iki veya daha fazla çokgen yüzü köşe noktasında birleşen bir çokyüzlü anlamına gelir. Bu durumdaki yüksek derecede simetrik özellikler, her bir cisimin Platonik cisimlerden çeşitli işlemler sonucunda türetildiği anlamına gelir. Bu işlemler kesme (truncation), düzeltme (rectification), genişletme (expansion) ve snob işlemleridir. Buna göre, kesme, köşeleri kesmeyi içerir; simetriyi korumak için, kesim çokgenin merkezine bir köşeyi birleştiren çizgiye dik bir düzlemedir ve tüm köşeler için aynıdır. Kesme, bitişik köşelerden gelen her yüz çiftinin tam olarak bir noktayı paylaşacağı kadar derinse, buna düzeltme denir. Genişletme, her yüzü merkezden uzaklaştırmayı (Platonik cisimin simetrisini korumak için aynı mesafede) ve dışbükey gövdeyi almayı içerir. Snub, çokyüzlülerin çokyüzlü yüzlerini ayırarak, yüzlerini belirli açılarda bükerek ve bunları eşkenar üçgenlerle doldurarak yapılan bir çokyüzlüler inşa sürecidir. Aşağıda yer verilmiş olan Şekil 2 de Arşimedyan cisimler görülmektedir.



Şekil 2: Arşimedyan cisimler

Arşimedyan cisimlerin isimleri ve bu cisimlerin yüzlerini oluşturan düzgün çokgenlerin hangi türde ve kaç tane olduğunu bilgisini içeren liste aşağıdaki gibidir:

1. Truncated tetrahedron (4 üçgen ve 4 altıgen)
2. Cuboctahedron (8 üçgen ve 6 kare)
3. Truncated cube (8 üçgen ve 6 sekizgen)
4. Truncated octahedron (6 kare ve 8 altıgen)
5. Rhombicuboctahedron (8 üçgen ve 18 kare)
6. Truncated cuboctahedron (12 kare, 8 altıgen ve 6 sekizgenler)
7. Snub cube (32 üçgen ve 6 kare)
8. Icosidodecahedron (20 üçgen ve 12 beşgen)
9. Truncated dodecahedron (20 üçgen ve 12 ongen)
10. Truncated icosahedron (12 beşgen ve 20 altıgen)
11. Rhombicosidodecahedron (20 üçgen, 30 kare ve 12 beşgen)
12. Truncated icosidodecahedron (30 kare, 20 altıgen ve 12 ongen)
13. Snub dodecahedron (80 üçgen ve 12 beşgen)

Bu konularla ilgili daha geniş ve detaylı bilgilere P. R. Cromwell' in 1997 basımı Polyhedra eserinden ve M. Senechal' ın 2013 basımı Shaphing Space isimli eserlerinden ve de ilgili eserlerdeki işaret edilen kaynaklardan ulaşılabilir.

MINKOWSKI GEOMETRİLER VE METRİKLERİ

Bu kısımda çokyüzlülere dair bilgilerin yanı sıra analitik 3-uzayda lineer yapısı Öklidyen 3-uzayla aynı olan yani noktalar kümesi, doğrular kümesi ve de noktalar ile doğrular kümesine dair ilişkileri düzenleyen üzerinde bulunma bağıntısının aynı olduğu dahası açıların Öklidyen 3-uzaydaki aynı yöntemle ölçüldüğü anlaşılabilecek olan Minkowski geometrilerden bahsedilecektir. Buna göre Minkowski geometrinin, Öklidyen 3-uzayla tek farkının uzaklığın tüm doğrultularda aynı ölçülmemesi ya da kısaca metriğin Öklidyen 3-uzaydan farklı olmasıdır. Bu tarzda ifade edilen metrik geometriler Minkowski geometri genel adı ile anılır. Bu aşamada bir Minkowski geometride çalışma yapılırken metriğin ne olduğu bilindiğinden dolayı ilgili metriğe göre çalışılan uzayın küreleri belirlenebilir. Örneğin 3-boyutlu analitik uzayda taksi metriği ve ya maksimum (Chebyshev) metriği ele alınırsa ilgili uzayların küreleri sırasıyla octahedron ve hexahedron olarak karşımıza çıkmaktadır. Bunlar beş Platonik cisimin iki tanesidir. O halde bu aşama da akıllara doğal olarak hemen şu soru gelmektedir: “Diğer Platonik cisimleri küre kabul edecek şekilde metrikler dahası bu metrikler sayesinde Minkowski geometriler var mıdır?” O halde öncelikle doğal olarak çokyüzlünün ne olduğu sorunun cevabını verilmelidir. Bu bağlamda $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ için a_{ij} ve b_i reel sayılar olmak üzere sonlu çokluktaki

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

şeklinde ifade edilmiş olan lineer eşitsizliklerden oluşan sistemin çözümün kümesine yani

$$P = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{aligned} \right\}$$

kümesine bir çokyüzlü denir. Bu noktada çokyüzlünün her bir yüzü bir düzlemsel çokgen olacağından $j \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere $\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i = b_j$ denkleminin yüzey denklemi denilir. Üstelik açıkça anlaşılabileceği üzere bir çokyüzlüyü belirten metrik bulunmak istediğinden bu yüzey denklemlerinin belirlenmesi gereklidir. Bu aşamada bu konuya dair detaylı bilgi ve açıklamalara Berger’ in 2004 ve 2009 basımı olan Geometry I ve Geometry II eserlerinden ve ayrıca Thompson’ un 1996 yılı yayımlanan Minkowski Geometry isimli eserinden ulaşılabilir.

Bir çokyüzlüyü küre olarak ifade edecek metriğin belirlenmesinde aşağıdaki maddelerdeki hususlara dikkat edilmesi gereklidir. Buna göre ilgili adımlar üç tane olup aşağıdaki şekildedir.

Adım 1: Çokyüzlüler, koordinat sisteminde en uygun simetriye sahip olacak şekilde yerleştirilir. Böylece, çokyüzlünün köşe noktaları simetrik olarak koordinatlanmış olacaktır.

Adım 2: Adım 1 de bahsedilen simetrik köşe noktaları kullanılarak çokyüzlünün simetrik olacak olan yüzey düzlem denklemleri bulunur.

Bu iki adım sayesinde çokgen için uzaklık fonksiyonu metrik uzayda simetri aksiyomunu sağlayacaktır.

Adım 3: Son olarak, çokyüzlülerin yüzlerini içeren düzlemlerin denklemlerini içeren genel bir ilişki verilmelidir. Metrik uzayda uzaklığın negatif olmaması aksiyomu sağlamak için, bu genel ilişki mutlak değer fonksiyonunun kullanımıyla verilir.

Sonuç olarak yüzey denklemleri arasında verilen genel ilişki, bu üç adım sayesinde ve çokgenin dışbükey ve simetrik olması nedeniyle otomatik olarak üçgen eşitsizliğini sağlayacaktır. Daha basitçe verilmiş olan ifade aranan ilgili metrik olacaktır. Fonksiyonel analizde ve dahası Minkowski geometriler de verilen bir çokyüzlüyü küre kabul edilecek metriğin mevcut bilinmemektedir. Ancak bu metriğin ne olduğu ya da nasıl tanımlı olduğu bilinmemektedir. Böylelikle yukarıda ifade edilen yöntem ile bu probleme bir çözüm getirilmiş olur. O halde artık verilen bir çokyüzlüyü küre kabul edecek metrik kolaylıkla gerekli olan biraz uzun ve sıkıcı olabilecek hesaplamalar yapılarak teşkil edilebilir.

Bu noktada bölüm boyunca kullanılacak olan bir gösterime açıklık getirilsin. $N_1 = (x_1, y_1, z_1), N_2 = (x_2, y_2, z_2) \in IR^3$ olmak üzere

$$U = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$$

olsun. Ayrıca (+) ve (-) ile $X = |x_1 - x_2|, Y = |y_1 - y_2|, Z = |z_1 - z_2|$ ifadeleri arasındaki $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X$ ve $Z \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow Z$ şeklindeki sırasıyla pozitif ve negatif yönlü yönlendirilmeler işaret edilmektedir. Örneğin $U = X = |x_1 - x_2|$ ise $U^+ = Y = |y_1 - y_2|$ ve $U^- = Z = |z_1 - z_2|$ olacaktır.

Tanım 2.1: $N_1 = (x_1, y_1, z_1), N_2 = (x_2, y_2, z_2) \in IR^3$ herhangi iki nokta olsun. Bu taktirde $\Delta \in \{H, O, D, I\}$ ve $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\lambda = \varphi - 1$, $\mu = 2\varphi - 3$, $\delta = 2 - \varphi$ olmak üzere

$$d_H(N_1, N_2) = U$$

$$d_O(N_1, N_2) = U + U^+ + U^-$$

$$d_D(N_1, N_2) = U + \lambda U^+$$

$$d_I(N_1, N_2) = \max\{U + \delta U^-, \lambda(U + U^+ + U^-)\}$$

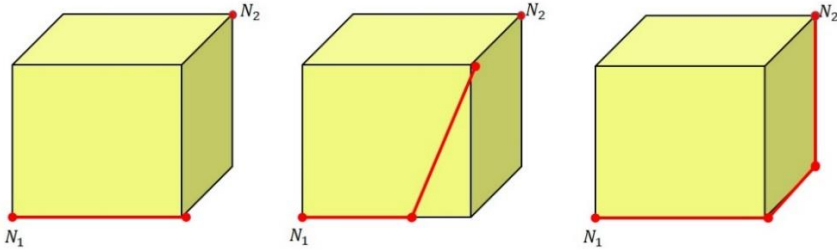
şeklinde tanımlı $d_\Delta: IR^3 \times IR^3 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna sırasıyla $N_1 = (x_1, y_1, z_1), N_2 = (x_2, y_2, z_2) \in IR^3$ noktaları arasındaki hexahedron (maksimum veya Chebyshev), octahedron (taksi), dodecahedron ve icosahedron uzaklık fonksiyonu adı verilir.

Yukarıdaki tanımda 3-boyutlu analitik uzay için verilmiş olan bu metriklerden ilk ikisi maksimum ve taksi metrik olarak bilinirken diğer ikisi dodecahedron ve icosahedron metrikleri Temel Ermiş'in doktora tezinde verilmiştir. Böylelikle Platonik cisimlerden tetrahedron hariç diğer dört cismi küre kabul edecekler metrikler teşkil edilmiş olur. Sadece tetrahedronu küre

kabul edecek metrik bulunulamamıştır. Dahası tetrahedronu küre kabul eden metrik yoktur, ancak tetrahedronu verecek şekilde semi-metrik verilebilir.

Bunun yanı sıra yukarıdaki metriklerde;

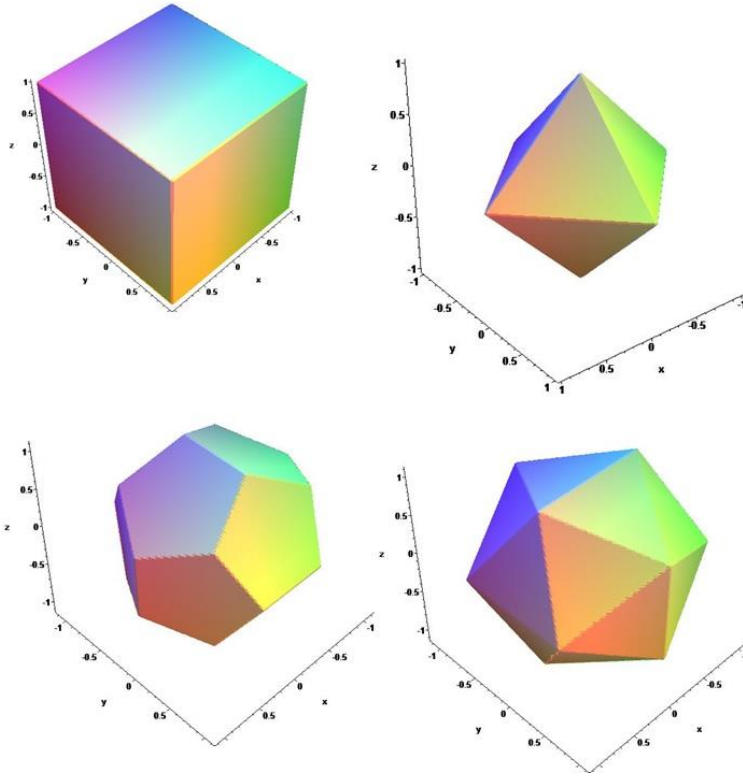
- $d_{\Delta}(N_1, N_2) = U$ veya $d_{\Delta}(N_1, N_2) = \alpha U$ şeklinde bir ifade karşılık gelirse N_1 ile N_2 noktaları arasındaki en kısa yol eksenlerden birine paralel bir doğru parçası olup uzaklık ise bu doğru parçasının Öklidyen uzunluğu veya Öklidyen uzunluğun α katı olur.
- $d_{\Delta}(N_1, N_2) = U + \alpha U^{+/-}$ veya $d_{\Delta}(N_1, N_2) = \beta(U + \alpha U^{+/-})$ şeklinde bir ifade karşılık gelirse N_1 ile N_2 noktaları arasındaki en kısa yol biri eksenlerden birine paralel bir doğru parça ve diğeri bir diğer eksen ile $\arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ radyanlık açı yapan doğru parçalarının birleşimi olup uzaklık ise bu doğru parçalarının Öklidyen uzunluklarının ilgili katlarının çarpılıp toplanmasıdır.
- $d_{\Delta}(N_1, N_2) = U + U^+ + U^-$ veya $d_{\Delta}(N_1, N_2) = \alpha(U + U^+ + U^-)$ şeklinde bir ifade karşılık gelirse N_1 ile N_2 noktaları arasındaki en kısa yol her biri bir eksene paralel olan üç doğru parçasının birleşimi olup uzaklık ise bu doğru parçalarının Öklidyen uzunluklarının toplamı veya ilgili Öklidyen uzunluk toplamının α katı olur.



Şekil 3: Platonik cisimlerin metriklerinin yolları

Teorem 2.1: Tanım 2.1 de ifade edilmiş olan hexahedron (maksimum veya Chebyshev), octahedron (taksi), dodecahedron ve icosahedron uzaklık fonksiyonları 3-boyutlu analitik uzayda birer metriktirler. Üstelik 3-boyutlu analitik uzayda bu metriklere göre merkezli birim küreler sırasıyla hexahedron, octahedron, dodecahedron ve icosahedrondur.

İspat: Bu teoremden yer verilen uzaklık fonksiyonlarının metrik olduklarının ispatına Gelişgen 2007 ve Ermiş 2014 kaynaklarından ulaşılabilir. İlgili uzaklık fonksiyonlarına veya metriklere göre merkezli birim kürelerin şekiller aşağıdaki şekil 4 de görüldüğü gibidir.



Şekil 4: Platonik cisimlerin metriklerinin merkezli küreleri

Platonik cisimleri küre kabul edecek şekildeki metriklere benzer olarak Arşimedyen cisimleri küre kabul eden metrikler araştırılmıştır. Bunlara dair bilgilere Özcan Gelişgen, Zeynep Can ve Zeynep Çolak'ın yaptığı çeşitli çalışmalarda ulaşılabilmektedir. İlgili araştırmacılar on üç Arşimedyen cisimden on tanesi için metrik geometri oluşturdukları literatürdeki çalışmalarından anlaşılmaktadır. Buna göre truncated tetrahedron, snub cube ve snub dodecahedron için olanlar hariç diğer on Arşimedyen cisim için küresi ilgili Arşimedyen cisim olacak şekilde metrik geometri teşkil edilmiştir. Bu üç cisimden truncated tetrahedron tam simetrik olmadığından dolayı metrik değil ancak semi-metrik oluşturulabilirken, snub cube ile snub dodecahedron içince köşe noktaların koordinatlarının fazlası ile karmaşık olmasından dolayı bir metrik bulunmamıştır.

Tanım 2.2: $N_1 = (x_1, y_1, z_1), N_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ herhangi iki nokta olsun. Bu takdirde $\Delta \in \{CO, TC, TO, RC, TCO, ID, TD, TI, RID, TID\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
d_{co}(N_1, N_2) &= \max \left\{ U, \frac{1}{2}(U + U^+ + U^-) \right\} \\
d_{TC}(N_1, N_2) &= \max \left\{ U, (\sqrt{2} - 1)(U + U^+ + U^-) \right\} \\
d_{TO}(N_1, N_2) &= \max \left\{ U, \frac{2}{3}(U + U^+ + U^-) \right\} \\
d_{RC}(N_1, N_2) &= \max \left\{ U, \frac{2\sqrt{2} + 1}{7}(U + U^+ + U^-), \frac{\sqrt{2}}{2}U + \frac{\sqrt{2}}{2}U^+, \frac{\sqrt{2}}{2}U + \frac{\sqrt{2}}{2}U^- \right\} \\
d_{TCO}(N_1, N_2) &= \max \left\{ U, \frac{3 - \sqrt{2}}{3}(U + U^+ + U^-), \frac{10 - \sqrt{2}}{14}(U + U^+), \frac{10 - \sqrt{2}}{14}(U + U^-) \right\} \\
d_{ID}(N_1, N_2) &= \max \left\{ U + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}U^+, U + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}U^-, \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(U + U^+ + U^-) \right\} \\
d_{TD}(N_1, N_2) &= \max \left\{ \frac{15 - \sqrt{5}}{22}(U + U^+ + U^-), U + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}U^+, \frac{5 + 7\sqrt{5}}{22}U + \frac{4\sqrt{5} - 5}{11}U^- \right\} \\
d_{TI}(N_1, N_2) &= \max \left\{ \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(U + U^+ + U^-), U + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}U^-, \frac{27 + 3\sqrt{5}}{38}U + \frac{6\sqrt{5} - 3}{19}U^+ \right\} \\
d_{RID}(N_1, N_2) &= \max \left\{ \frac{4 + \sqrt{5}}{11}(U + U^+ + U^-), \frac{9 + 5\sqrt{5}}{22}U + \frac{1 + 3\sqrt{5}}{22}U^-, U, \frac{3 + \sqrt{5}}{6}U + \frac{\sqrt{5} + 1}{6}U^+, \frac{\sqrt{5} + 1}{4}U + \frac{1}{2}U^- + \frac{\sqrt{5} - 1}{4}U^+ \right\} \\
d_{RID}(N_1, N_2) &= \max \left\{ \frac{4 - \sqrt{5}}{3}(U + U^+ + U^-), \frac{7 + \sqrt{5}}{10}U + \frac{3\sqrt{5} - 1}{10}U^+, U, \frac{3\sqrt{5} - 1}{6}U + \frac{5\sqrt{5} - 9}{6}U^-, \frac{\sqrt{5} + 1}{4}U + \frac{1}{2}U^- + \frac{\sqrt{5} - 1}{4}U^+ \right\}
\end{aligned}$$

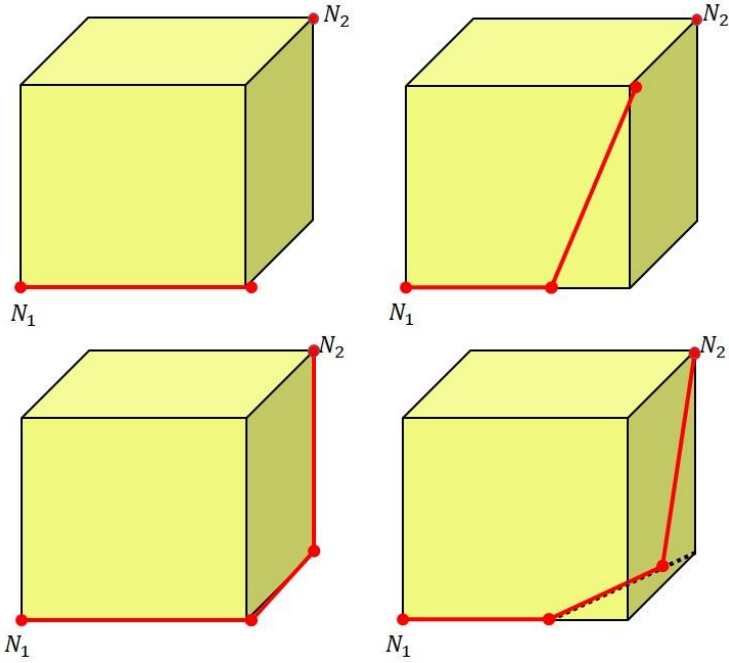
şeklinde tanımlı $d_{\Delta}: IR^3 \times IR^3 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna sırasıyla $N_1 = (x_1, y_1, z_1), N_2 = (x_2, y_2, z_2) \in IR^3$ noktaları arasındaki cuboctahedron, truncated cube, truncated octahedron, rhombicuboctahedron, truncated cuboctahedron, icosidodecahedron, truncated dodecahedron, truncated icosahedron, rhombicosidodecahedron ve truncated icosidodecahedron metriği adı verilir.

Buna göre yukarıdaki metriklerde;

- $d_{\Delta}(N_1, N_2) = U$ veya $d_{\Delta}(N_1, N_2) = \alpha U$ şeklinde bir ifade karşılık gelirse N_1 ile N_2 noktaları arasındaki en kısa yol eksenlerden birine paralel bir doğru parçası olup uzaklık ise bu

doğru parçasının Öklidyen uzunluğu veya Öklidyen uzunluğun α katı olur.

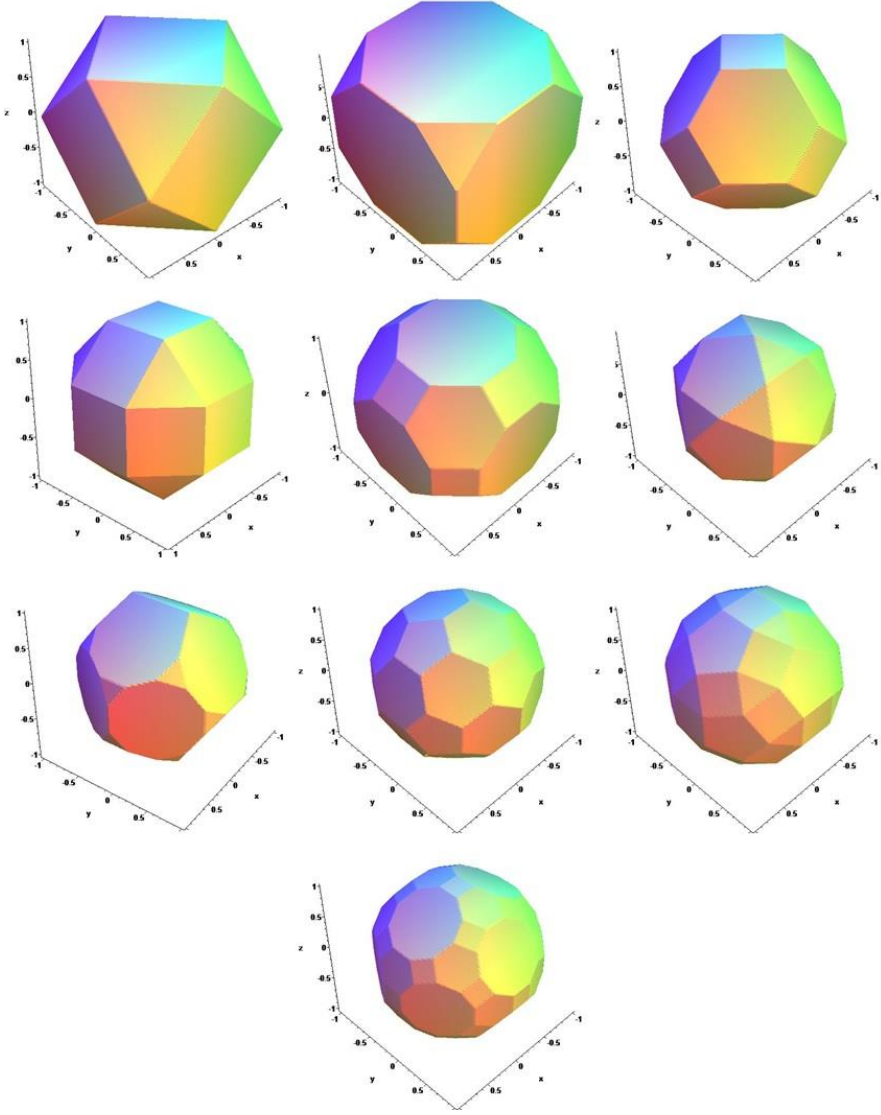
- $d_{\Delta}(N_1, N_2) = U + \alpha U^{+/-}$ veya $d_{\Delta}(N_1, N_2) = \beta(U + \alpha U^{+/-})$ şeklinde bir ifade karşılık gelirse N_1 ile N_2 noktaları arasındaki en kısa yol biri eksenlerden birine paralel bir doğru parça ve diğeri bir diğer eksen ile $\arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ radyanlık açı yapan doğru parçalarının birleşimi olup uzaklık ise bu doğru parçalarının Öklidyen uzunluklarının ilgili katlarının çarpılıp toplanmasıdır.
- $d_{\Delta}(N_1, N_2) = U + U^+ + U^-$ veya $d_{\Delta}(N_1, N_2) = \alpha(U + U^+ + U^-)$ şeklinde bir ifade karşılık gelirse N_1 ile N_2 noktaları arasındaki en kısa yol her biri bir eksene paralel olan üç doğru parçasının birleşimi olup uzaklık ise bu doğru parçalarının Öklidyen uzunluklarının toplamı veya ilgili Öklidyen uzunluk toplamının α katı olur.
- $d_{\Delta}(N_1, N_2) = U + \alpha U^+ + \beta U^-$ veya $d_{\Delta}(N_1, N_2) = \gamma(U + \alpha U^+ + \beta U^-)$ şeklinde bir ifade karşılık gelirse N_1 ile N_2 noktaları arasındaki en kısa yol biri bir koordinat eksenine paralel ve diğerleri diğer eksenler ile $\arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ ve $\arccos\left(\frac{1}{\beta}\right)$ radyanlık açı yapan doğru parçalarının birleşimi olup uzaklık ise bu doğru parçalarının Öklidyen uzunluklarının toplamı veya ilgili Öklidyen uzunluk toplamının γ katı olur.



Şekil 5: Arşimedyan cisimlerin metriklerinin yolları

Teorem 2.2: Tanım 2.2 de ifade edilmiş olan cuboctahedron, truncated cube, truncated octahedron, rhombicuboctahedron, truncated cuboctahedron, icosidodecahedron, truncated dodecahedron, truncated icosahedron, rhombicosidodecahedron ve truncated icosidodecahedron uzaklık fonksiyonları 3-boyutlu analitik uzayda birer metriktirler. Üstelik 3-boyutlu analitik uzayda bu metriklere göre merkezli birim küreler sırasıyla cuboctahedron, truncated cube, truncated octahedron, rhombicuboctahedron, truncated cuboctahedron, icosidodecahedron, truncated dodecahedron, truncated icosahedron, rhombicosidodecahedron ve truncated icosidodecahedrondur.

İspat: Bu teoremde yer verilen uzaklık fonksiyonlarının metrik olduklarının ispatına Çolak 2016, Can 2016 ve Gelişgen, Kaya, Çolak ve Can'ın çeşitli kaynaklarından ulaşılabilir. İlgili uzaklık fonksiyonlarına veya metriklere göre merkezli birim kürelerin şekiller aşağıdaki şekil 6 de görüldüğü gibidir.



Şekil 6: Arşimed cisimlerin metriklerinin merkezil küreleri

Yardımcı Teorem 2.1: $N_1 = (x_1, y_1, z_1), N_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ 3-boyutlu analitik uzayda herhangi iki nokta ve bu noktalardan geçen doğru l olsun. Ayrıca d_E Öklidyen uzaklık fonksiyonu gösterebilir ve l doğrusunun doğrultu vektörü (p, q, r) olsun. $U_d = \max\{|p|, |q|, |r|\}$ ve U_d^+ ve U_d^- ifadeleri de U_d nin pozitif ve negatif yönlendirmeleri olmak üzere $\Delta \in \{H, O, D, I, CO, TC, TO, RC, TCO, ID, TD, TI, RID, TID\}$ için

$$d_{\Delta}(N_1, N_2) = \frac{\rho_{\Delta}(N_1, N_2)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} d_E(N_1, N_2)$$

olur. Burada $\rho_{\Delta}(N_1, N_2)$ ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 \rho_H(N_1, N_2) &= U_d \\
 \rho_O(N_1, N_2) &= U_d + U_d^+ + U_d^- \\
 \rho_D(N_1, N_2) &= U_d + \lambda U_d^+ \\
 \rho_I(N_1, N_2) &= \max\{U_d + \delta U_d^-, \lambda(U_d + U_d^+ + U_d^-)\} \\
 \rho_{CO}(N_1, N_2) &= \max\left\{U_d, \frac{1}{2}(U_d + U_d^+ + U_d^-)\right\} \\
 \rho_{TC}(N_1, N_2) &= \max\{U_d, (\sqrt{2} - 1)(U_d + U_d^+ + U_d^-)\} \\
 \rho_{TO}(N_1, N_2) &= \max\left\{U_d, \frac{2}{3}(U_d + U_d^+ + U_d^-)\right\} \\
 \rho_{RC}(N_1, N_2) &= \max\left\{U_d, \frac{2\sqrt{2} + 1}{7}(U_d + U_d^+ + U_d^-), \frac{\sqrt{2}}{2}U_d + \frac{\sqrt{2}}{2}U_d^+, \frac{\sqrt{2}}{2}U_d + \frac{\sqrt{2}}{2}U_d^-\right\} \\
 \rho_{TCO}(N_1, N_2) &= \max\left\{U_d, \frac{3 - \sqrt{2}}{3}(U_d + U_d^+ + U_d^-), \frac{10 - \sqrt{2}}{14}(U_d + U_d^+), \frac{10 - \sqrt{2}}{14}(U_d + U_d^-)\right\} \\
 \rho_{ID}(N_1, N_2) &= \max\left\{U_d + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}U_d^+, U_d + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}U_d^-, \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(U_d + U_d^+ + U_d^-)\right\} \\
 \rho_{TD}(N_1, N_2) &= \max\left\{\frac{15 - \sqrt{5}}{22}(U_d + U_d^+ + U_d^-), U_d + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}U_d^+, \frac{5 + 7\sqrt{5}}{22}U_d + \frac{4\sqrt{5} - 5}{11}U_d^-\right\} \\
 \rho_{TI}(N_1, N_2) &= \max\left\{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}(U_d + U_d^+ + U_d^-), U_d + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}U_d^-, \frac{27 + 3\sqrt{5}}{38}U_d + \frac{6\sqrt{5} - 3}{19}U_d^+\right\} \\
 \rho_{RID}(N_1, N_2) &= \max\left\{\frac{4 + \sqrt{5}}{11}(U_d + U_d^+ + U_d^-), \frac{9 + 5\sqrt{5}}{22}U_d + \frac{1 + 3\sqrt{5}}{22}U_d^-, U_d, \frac{3 + \sqrt{5}}{6}U_d + \frac{\sqrt{5} + 1}{6}U_d^+, \frac{\sqrt{5} + 1}{4}U_d + \frac{1}{2}U_d^-, \frac{\sqrt{5} - 1}{4}U_d^+\right\} \\
 \rho_{RID}(N_1, N_2) &= \max\left\{\frac{4 - \sqrt{5}}{3}(U_d + U_d^+ + U_d^-), \frac{7 + \sqrt{5}}{10}U_d + \frac{3\sqrt{5} - 1}{10}U_d^+, U_d, \frac{3\sqrt{5} - 1}{6}U_d + \frac{5\sqrt{5} - 9}{6}U_d^-, \frac{\sqrt{5} + 1}{4}U_d + \frac{1}{2}U_d^-, \frac{\sqrt{5} - 1}{4}U_d^+\right\}
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki yardımcı teorem Platonik ve Arşimet cisimlerinin metrikleri ile Öklidyen metrik arasındaki geçiş bağıntısı ortaya koymaktadır. Böylelikle herhangi iki nokta arasındaki Öklidyen ve ilgili Platonik veya Arşimet cismine ait metrik arasında ilgi kurulmuş olur. Bu yardımcı teorem sayesinde ortaya konulmuş olan bu ilgi hemen aşağıdaki sonuçların ortaya çıkmasına imkân verir.

Sonuç 2.1: N_1, N_2 ve X , 3-boyutlu analitik uzayda herhangi doğrudan üç nokta ve $\Delta \in \{H, O, D, I, CO, TC, TO, RC, TCO, ID, TD, TI, RID, TID\}$ olsun. Bu taktirde $d_E(N_1, X) = d_E(N_2, X)$ olması için gerek ve yeter koşul $d_\Delta(N_1, X) = d_\Delta(N_2, X)$ olmasıdır.

Sonuç 2.2: N_1, N_2 ve X , 3-boyutlu analitik uzayda doğrudan üç farklı nokta ve $\Delta \in \{H, O, D, I, CO, TC, TO, RC, TCO, ID, TD, TI, RID, TID\}$ olsun. Bu taktirde $\frac{d_E(N_1, X)}{d_E(N_2, X)} = \frac{d_\Delta(N_1, X)}{d_\Delta(N_2, X)}$ olur. Yani bir doğru boyunca Öklidyen ve Platonik veya Arşimet cisimin metriğinin oranları aynıdır.

MINKOWSKI GEOMETRİLERİN İZOMETRİ GRUPLARI

Geometrik araştırmalarda kullanılan üç temel geometrik yaklaşım söz konusudur. Bu araştırma yöntemleri basit anlamda ismen sentetik, metrik ve grup yaklaşımı olarak ifade edilebilir. Felix Kelin geometri tanımı, bir kümenin kendi üzerine olan bire-bir ve örten dönüşümlerin yani izomorfizmlerin altında değişmez kalan özelliklerin incelenmesi olup izomorfizmler altında uzaklığın değişmediği invariant kaldığı dönüşümlerin araştırılması bir grup yaklaşımıdır ve geometrinin izometri grubu olarak adlandırılır. Konveks kümeler geometrilerin izometrilere grubunun belirlenmesinde önemli bir rol oynar. Bu özellikler hareketler grubu altında değişmezdir ve geometri bu özellikleri inceler. Bir uzayın izometrilere grubu hakkında literatürde gerçekleştirilmiş ve yayımlanmış birçok çalışma vardır (Bkz. Muhtelif yıllarda yayımlanmış kaynakçada yer alan Gelişgen, Ermiş, Kaya, Çolak, Can, Savcı ve Günaltı çalışmaları). Giriş bölümünde Minkowski geometrisinde lineer yapının Öklid yapısıyla neredeyse aynı olduğu sadece tek farkın uzaklığın her yönde aynı şekilde ölçülmediği belirtilmişti. Üstelik Öklid uzayındaki alışılmış küre yerine farklı bir metrik kullanıldığından birim küre belirli simetrik kapalı konveks bir kümedir. O halde akıllara mantıksal olarak herhangi bir Minkowski geometrinin izometri grubunun ne olacağı sorusu gelmektedir. Bu sorunun yanıtı kısmen de olsa Horvath'ın 2017 yılında yayımladığı makale ile verilmiştir. Buna göre Horvath herhangi bir Minkowski geometrisi için aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 3.1: $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayının birim küresi bir elips içinde iki düzlemi kesmiyorsa, $(V, \|\cdot\|)$ Normlu uzayının izometrilere grubu olan $I(3)$; Öklidyen ötelemelerin grubu $T(3)$ ile determinant değeri ± 1 olan lineer dönüşümlerin grubunun bir sonlu alt grubunun yarı-direkt çarpımıdır.

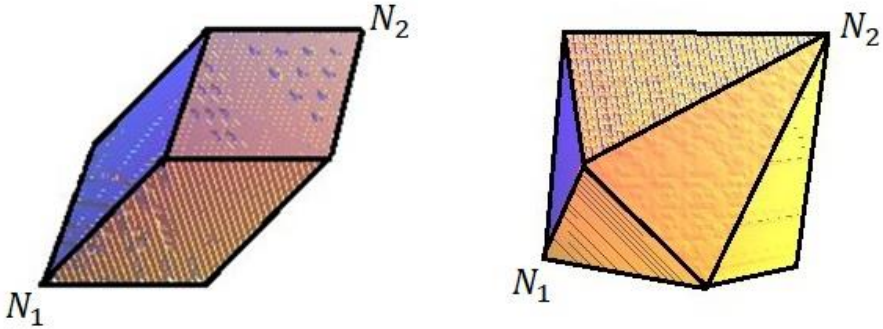
Bu teoremin ortaya atılmasından sonra açık bir şekilde geriye tek bir soru kalır. O soru da, teoremden bahsedilen ilgili alt grup ne olduğudur? Şimdi bu bağlamda Platonik ve ya Arşimet cisimlerinin metrikleri ile döşenmiş 3-

boyutlu analitik uzayın izometri grubu ilgili cismin (Platonik veya Arşimedyen cisim) simetri grubu ile Öklidyen ötelemelerin grubu $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımı olduğunu gösterilecektir. Burada ele alınan ya da metrikleri verilen Platonik veya Arşimedyen cisimlerin simetri grupları iki farklı şekilde karşımıza çıkmaktadır. Bunlar iki Octahedral ve icosahedral simetri gruplarıdır. Yani açıkça octahedral simetri grubu O_h açıkça bir octahedronun (düzgün sekizyüzlünün) simetri grubu olup 48 hareket içermektedir. Icosahedral simetri grubu I_h da bir icosahedronun (düzgün yirmiyüzlünün) simetri grubu olup 120 hareket içermektedir. Bu hareketler bir düzgün sekizyüzlü veya düzgün yirmi yüzlüyü değiştirmeyen hareket olarak kısaca özetlenebilir.

Tanım 4.1: Arşimedyen bir metrik ile döşenmiş 3-boyutlu analitik uzayda herhangi bir iki nokta N_1 ve N_2 olsun. Bu taktirde

$$\{X: d_\Delta(N_1, X) + d_\Delta(X, N_2) = d_\Delta(N_1, N_2)\}$$

kümesine N_1 ve N_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi adı verilir ve $[N_1 N_2]$ şeklinde gösterilir. Ele alınan Arşimedyen cisimlerine dair metriklerle ilişkin minimum uzaklık kümeleri ya bir paralel yüz ya da altıgen tabanlı iki piramittir.



Şekil 7: Arşimed cisimlerin metriklerinin minimum uzaklık küme tipleri

Önerme 4.1. $\varphi: IR^3 \rightarrow IR^3$ bir izometri ve $[N_1 N_2]$ ifadesi N_1 ve N_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi olsun. Bu taktirde

$$\varphi([N_1 N_2]) = [\varphi(N_1) \varphi(N_2)]$$

olur.

İspat: $M \in \varphi([N_1 N_2])$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} M \in \varphi([N_1 N_2]) &\Leftrightarrow \exists N \in [N_1 N_2] \ni M = \varphi(N) \\ &\Leftrightarrow d_\Delta(N_1, N) + d_\Delta(N, N_2) = d_\Delta(N_1, N_2) \\ &\Leftrightarrow d_\Delta(\varphi(N_1), \varphi(N)) + d_\Delta(\varphi(N), \varphi(N_2)) = d_\Delta(\varphi(N_1), \varphi(N_2)) \\ &\Leftrightarrow M = \varphi(N) \in [\varphi(N_1) \varphi(N_2)] \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1. $\varphi: IR^3 \rightarrow IR^3$ bir izometri ve $[N_1 N_2]$ ifadesi N_1 ve N_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi olsun. Bu taktirde φ dönüşümü köşeleri köşelere dönüştürür ve dahası $[N_1 N_2]$ minimum uzaklık kümesinin kenar uzunluklarını korur.

Önerme 4.2. $\varphi: IR_\Delta^3 \rightarrow IR_\Delta^3$ dönüşümü Δ bir Arşimed cismi olmak üzere ilgili cismi ait metrik ile döşeli IR_Δ^3 uzayında $\varphi(O) = O$ özelliğini sağlayan bir izometri olsun. Bu durumda Arşimed cisminin simetri grubuna bağlı olmak üzere $\varphi \in O_h$ veya $\varphi \in I_h$ olur.

İspat: $\Delta \in \{CO, TC, TO, RC, TCO, ID, TD, TI, RID, TID\}$ olmak üzere on farklı Arşimedyan cisim için on farklı metrikle bezenmiş uzayda her durum tek tek ele alınacaktır.

Durum 1: $\Delta = CO$ olsun. Bu durumda bu metrikle döşeli metrik uzayda $(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)$ ve $(2,2,2)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = (2,2,2)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin cuboctahedronun ait olan ve yukarıda bahsedilen üç noktasından geçen bir paralelyüz olduğu görülür. Bu üç nokta cuboctahedronun bir üçgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği cuboctahedronun sekiz üçgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüştürebileceği 6 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 48 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen cuboctahedronun simetri grubu olan octahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 2: $\Delta = TC$ olsun. Bu durumda bu metrikle döşeli metrik uzayda $(1,1, \sqrt{2}-1), (1, \sqrt{2}-1,1), (\sqrt{2}-1,1,1)$ ve $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = (\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin truncated cube ait olan ve yukarıda bahsedilen üç noktasından geçen bir paralelyüz olduğu görülür. Bu üç nokta truncated cubenin bir üçgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği truncated cubenin sekiz üçgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüştürebileceği 6 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 48 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen truncated cubenin simetri grubu olan octahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 3: $\Delta = TO$ olsun. Bu durumda bu metrikle döşeli metrik uzayda $(\frac{1}{2}, 0, 1), (0, -\frac{1}{2}, 1), (0, -1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -1, 0), (1, -\frac{1}{2}, 0), (1, 0, \frac{1}{2})$ ve $(1, 1, 1)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0, 0, 0)$ ve $D = (1, 1, 1)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin truncated octahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen altı noktasından geçen bir altıgen tabanlı 2-piramid olduğu görülür. Bu altı nokta truncated octahedronun bir altıgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği truncated octahedronun sekiz altıgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüşebileceği 6 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 48 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen truncated octahedronun simetri grubu olan octahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 4: $\Delta = RC$ olsun. Bu durumda bu metrikle döşeli metrik uzayda $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1, 1), (1, \sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1), (\sqrt{2} - 1, 1, \sqrt{2} - 1)$ ve $(2\sqrt{2} - 1, 2\sqrt{2} - 1, 2\sqrt{2} - 1)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0, 0, 0)$ ve $D = (2\sqrt{2} - 1, 2\sqrt{2} - 1, 2\sqrt{2} - 1)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin rhombicuboctahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen üç noktasından geçen bir paralelyüz olduğu görülür. Bu üç nokta rhombicuboctahedronun bir üçgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği rhombicuboctahedronun sekiz üçgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüşebileceği 6 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 48 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen rhombicuboctahedronun simetri grubu olan octahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 5: $\Delta = TCO$ olsun. Bu durumda bu metrikle döşeli metrik uzayda $(\frac{3+\sqrt{2}}{7}, \frac{2\sqrt{2}-1}{7}, 1), (1, \frac{3+\sqrt{2}}{7}, \frac{2\sqrt{2}-1}{7}), (\frac{2\sqrt{2}-1}{7}, 1, \frac{3+\sqrt{2}}{7}), (\frac{2\sqrt{2}-1}{7}, \frac{3+\sqrt{2}}{7}, 1), (1, \frac{2\sqrt{2}-1}{7}, \frac{3+\sqrt{2}}{7}), (\frac{3+\sqrt{2}}{7}, 1, \frac{2\sqrt{2}-1}{7})$ ve $(\frac{2\sqrt{2}+6}{7}, \frac{2\sqrt{2}+6}{7}, \frac{2\sqrt{2}+6}{7})$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0, 0, 0)$ ve $D = (\frac{2\sqrt{2}+6}{7}, \frac{2\sqrt{2}+6}{7}, \frac{2\sqrt{2}+6}{7})$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin truncated cuboctahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen altı noktasından geçen bir altıgen tabanlı 2-piramid olduğu görülür. Bu altı nokta truncated cuboctahedronun bir altıgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği truncated cuboctahedronun sekiz altıgen yüzü

olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüşebileceği 6 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 48 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen truncated cuboctahedronun simetri grubu olan octahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 6: $\Delta = ID$ olsun. Bu durumda bu metrikle dōşeli metrik uzayda $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ ve $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin icosidodecahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen üç noktasından geçen bir paralelyüz olduğu görülür. Bu üç nokta icosidodecahedronun bir üçgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği icosidodecahedronun yirmi üçgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüşebileceği 6 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 120 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen icosidodecahedronun simetri grubu olan icosahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 7: $\Delta = TD$ olsun. Bu durumda bu metrikle dōşeli metrik uzayda $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}+5}{10}\right), \left(\frac{\sqrt{5}+5}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{5-\sqrt{5}}{5}\right), \left(\frac{5-\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}+5}{10}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ ve $\left(\frac{\sqrt{5}+15}{10}, \frac{\sqrt{5}+15}{10}, \frac{\sqrt{5}+15}{10}\right)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = \left(\frac{\sqrt{5}+15}{10}, \frac{\sqrt{5}+15}{10}, \frac{\sqrt{5}+15}{10}\right)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin truncated dodecahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen üç noktasından geçen bir paralelyüz olduğu görülür. Bu üç nokta truncated dodecahedronun bir üçgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği truncated dodecahedronun yirmi üçgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüşebileceği 6 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 120 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen truncated dodecahedronun simetri grubu olan icosahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

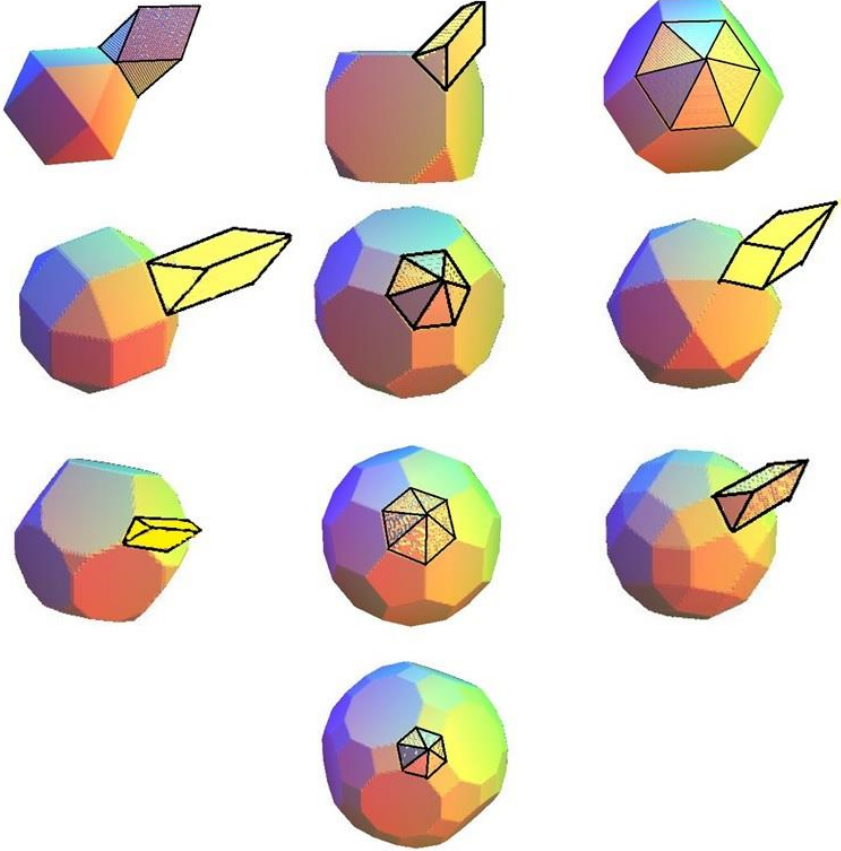
Durum 8: $\Delta = TI$ olsun. Bu durumda bu metrikle dōşeli metrik uzayda $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{6}, 0, 1\right), \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{6}, 0, 1\right), \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{6}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{6}\right),$
 $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ ve $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{3}, \frac{\sqrt{5}+1}{3}, \frac{\sqrt{5}+1}{3}\right)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{3}, \frac{\sqrt{5}+1}{3}, \frac{\sqrt{5}+1}{3}\right)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin

truncated icosahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen altı noktasından geçen bir altıgen tabanlı 2-piramid olduğu görülür. Bu altı nokta truncated icosahedronun bir altıgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği truncated icosahedronun yirmi altıgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüştürebileceği 6 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 120 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen truncated icosahedronun simetri grubu olan icosahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 9: $\Delta = RID$ olsun. Bu durumda bu metrikle dōşeli metrik uzayda $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, 3-\sqrt{5}\right), \left(3-\sqrt{5}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 3-\sqrt{5}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ ve $(4-\sqrt{5}, 4-\sqrt{5}, 4-\sqrt{5})$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = (4-\sqrt{5}, 4-\sqrt{5}, 4-\sqrt{5})$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin rhombicosidodecahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen üç noktasından geçen bir paralelyüz olduğu görülür. Bu üç nokta rhombicosidodecahedronun bir üçgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği rhombicosidodecahedronun yirmi üçgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüştürebileceği 6 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 120 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen rhombicosidodecahedronun simetri grubu olan icosahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 10: $\Delta = TID$ olsun. Bu durumda bu metrikle dōşeli metrik uzayda $\left(\frac{2\sqrt{5}-3}{11}, \frac{2\sqrt{5}-3}{11}, 1\right), \left(-\frac{2\sqrt{5}-3}{11}, \frac{2\sqrt{5}-3}{11}, 1\right), \left(\frac{4\sqrt{5}-6}{11}, \frac{1+3\sqrt{5}}{22}, \frac{9+5\sqrt{5}}{22}\right), \left(-\frac{4\sqrt{5}-6}{11}, \frac{1+3\sqrt{5}}{22}, \frac{9+5\sqrt{5}}{22}\right), \left(\frac{2\sqrt{5}-3}{11}, \frac{4+\sqrt{5}}{11}, \frac{5\sqrt{5}-2}{11}\right), \left(-\frac{2\sqrt{5}-3}{11}, \frac{4+\sqrt{5}}{11}, \frac{5\sqrt{5}-2}{11}\right)$ ve $\left(\frac{8+2\sqrt{5}}{11}, \frac{8+2\sqrt{5}}{11}, \frac{8+2\sqrt{5}}{11}\right)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = \left(\frac{8+2\sqrt{5}}{11}, \frac{8+2\sqrt{5}}{11}, \frac{8+2\sqrt{5}}{11}\right)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin truncated icosidodecahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen altı noktasından geçen bir altıgen tabanlı 2-piramid olduğu görülür. Bu altı nokta truncated icosidodecahedronun bir altıgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği truncated icosidodecahedronun yirmi altıgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu

noktaların dönüşebileceği 6 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 120 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen truncated icosidodecahedronun simetri grubu olan icosahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.



Şekil 8: Arşimed cisimlerin ile minimum uzaklık kümeleri

Teorem 4.2: $\varphi: IR_{\Delta}^3 \rightarrow IR_{\Delta}^3$ dönüşümü Δ bir Arşimed cismi olmak üzere ilgili cismi ait metrik ile dōşeli IR_{Δ}^3 uzayı üzerinde bir izometri olsun. Bu taktirde $\varphi = T_A \circ \Phi$ olacak şekilde bir tek $T_A \in T(3)$ ve $\Phi \in \{O_h, I_h\}$ dönüşümleri vardır. Burada $T(3)$, 3-boyutlu analitik uzayın ötelemeler grubu ve O_h, I_h ile de octahedron ve icosahedronun simetri grupları temsil edilmektedir.

İspat: φ dönüşümü ilgili Arşimed cisminin metriği ile dōşeli metrik uzayda $A = (a, b, c)$ olmak üzere $\varphi(O) = A$ özelliğindeki bir izometri olsun. Buna göre $\Phi = T_{-A} \circ \varphi$ dönüşümü tanımlansın. Bu taktirde açık bir şekilde $\Phi(O) = O$ özelliğinde bir izometri olacaktır. Böylelikle bir önceki önerme gereğince $\varphi = T_A \circ \Phi$ ve $\Phi \in \{O_h, I_h\}$ elde edilir. Dönüşümün tekliğinin

ispatı ise aşikârdır. Böylece herhangi bir Arşimed cisminin metriği ile dōşeli 3-boyutlu analitik uzayın izometrilere grubunun 3-boyutlu analitik uzayda bilinen Öklidyen ötelemeler grubu ile söz konusu Arşimedyan cismin simetri grubunun yarı direkt çarpımı olduğu gösterilmiş olur.

SONUÇ

Bu bölümde insanlık tarihi kadar kadim bir araştırma çalışma alanı geometrinin ilginç ve dikkat çeken çalışma alanlarından ikisi olan çokyüzlüler ile metrik geometriler ele alınmıştır. Buna göre, bahsi geçen alanlardan ilk ele alınanının konusu binlerce yıllardır insanların ilgisi çeken 3- boyutlu uzayda yer yaşam alınan sahip olan geometrik şekillerden çokyüzlülerin güzel ve enteresan bir sınıfı olan Arşimedyan cisimlerdir. İkinci ele alınan alanın konusu ise çokyüzlülere nispeten çok çok daha yeni olup ancak bir asıra dayanan bir maziye sahip olan metrik geometriler konusudur.

Özelliklerde son yıllarda yoğunlaşan çalışmalar ile bu iki alanın keşişimin de yer alan konulara dair çalışmaların sıklaştığı gözükmemektedir. Buna göre bu bahsi geçen konuyla ilgili çalışmalardan yola çıkarak, Arşimedyan cisimleri küre kabul edecek şekilde metriklerin dolayısıyla bu metrikler ile oluşturulan metrik geometrilerin varlıkları araştırılmış ve daha sonrasında ilgili metrik uzayların sağladığı bir takım geometrik özellikler incelenmiştir. İlgili Arşimed cismini küre kabul eden metrik ile Öklidyen metrik arasındaki geçiş bağıntıları bulunmuştur. Bu bağlantıdan yola çıkarak, bir doğrultu boyunca Öklidyen ve ilgili metriğin oranlarının yani bölme oranlarının değişmediği ortaya konmuştur.

Son olarak da Felix Klein'in bir kümenin kendi üzerine olacak şekilde bazı dönüşümler altında değişmez kalan özelliklerin incelenmesi olarak verdiği geometri tanımına uygun olarak oluşturulan ilgili metrik uzaylarda uzaklık koruyan dönüşümler yani izometrilere incelenerek dönüşümler tespit edilmiştir. Sonrasında ise ilgili uzayların izometri grubunun 3-boyutlu analitik uzayda bilinen Öklidyen ötelemeler grubu ile söz konusu Arşimedyan cismin simetri grubunun yarı direkt çarpımı olduğu ortaya konmuştur.

REFERANSLAR

- Berger, M., (2004). Geometry I, Springer-Verlag.
Berger, M., (2009). Geometry II, Springer-Verlag.
Can, Z., Gelişgen, Ö., ve Kaya, R. (2015). On the metrics induced by icosidodecahedron and rhombic triacontahedron. Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics (KoG), 19, 17–23.
Can, Z., Çolak, Z., ve Gelişgen, Ö. (2015). A note On the metrics induced By triakis icosahedron and disdyakis triacontahedron. Eurasian Academy of Sciences Eurasian Life Sciences Journal / Avrasya Fen Bilimleri Dergisi, 1, 1–11.

- Can, Z. (2016). Bazı Konveks Çok Yüzlülerle İlgili Metrikler Ve Bu Metriklerin Geometrilere Üzerine. Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Cromwell, P. R. (1997). Polyhedra, Cambridge University Press.
- Çolak, Z., ve Gelişgen, Ö. (2015). New metrics for deltoidal hexacontahedron and pentakis dodecahedron, Sakarya University Journal of Science, 19(3), 353–360.
- Çolak, Z. (2016). Bazı Katalan Çokyüzlülerle İlgili Metrik Geometrilere Üzerine. Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Ermiş, T. (2014). Düzgün çokyüzlülerin metrik geometrilere ile ilişkileri üzerine. Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Ermiş, T., ve Kaya, R. (2015). On the isometries the of 3- dimensional maximum space, Konuralp Journal of Mathematics, 3(1), 103–114.
- Ermiş, T., Savcı, Ü. Z., ve Gelişgen, Ö. (2019). A note about truncated rhombicuboctahedron and truncated rhombicicosidodecahedron space, Scientific Studies and Research Series Mathematics and Informatics, 29(1), 73–88.
- Ermiş, T. (2020). Geometric analysis of the some rectified Archimedean solids spaces via their isometry groups. Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 8(2), 96–109.
- Gelişgen, Ö. (2007). Minkowski geometrilere üzerine: Taksi, çin dama ve alfa geometrilere hakkında genel bir analiz. Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Gelişgen, Ö., ve Kaya, R. (2009). The Taxicab space group, Acta Mathematica Hungarica, 122(1–2), 187–200.
- Gelişgen, Ö., ve Kaya, R. (2015). The isometry group of Chinese Checker space. International Electronic Journal Geometry, 8(2), 82–96.
- Gelişgen Ö, ve Can, Z. (2016). On the family of metrics for some platonic and Archimedean polyhedra. Konuralp Journal of Mathematics, 4(2), 25–33.
- Gelişgen Ö., ve Çolak, Z. (2016). A family of metrics for some polyhedra. Automation Computers Applied Mathematics Scientific Journal, 25 (1), 35–48.
- Gelişgen, Ö., Ermiş, T., ve Günaltılı, İ. (2017). A note about the metrics induced by truncated dodecahedron and truncated icosahedron. International Journal of Geometry, 6(2), 5–16.
- Gelişgen Ö., ve Yavuz, S. (2019). A note about isometry groups of chamfered dodecahedron and chamfered icosahedron spaces. International Journal of Geometry, 8(2), 33–45.
- Gelişgen Ö., ve Yavuz, S. (2019). Isometry groups of chamfered cube and chamfered octahedron spaces. Mathematical Sciences and Applications e-Notes, 7(2), 174–182.
- Gelişgen Ö., ve Ermiş, T. (2020). The metrics for rhombicuboctahedron and rhombicosidodecahedron. Palestine Journal of Mathematics, 9(1), 15–25.
- Gelişgen Ö, ve Can, Z. (2023). The Group of Transformation Which Preserving Distance on Cuboctahedron and Truncated Octahedron Space. New Trends in Mathematical Sciences, 11(4), 101–108.

- Gelişgen Ö., ve Çolak, Z. (2023). The Isometry Group of Tetrakis Hexahedron and Disdyakis Dodecahedron Spaces. *New Trends in Mathematical Sciences*, 11(4), 92–100.
- Gelişgen Ö., ve Can, Z. (2024). The Group of Transformations which Preserving Distance on Some Polyhedral Space. *Hagia Sophia Journal of Geometry*, 6(1), 23-32.
- Gelişgen Ö., ve Çolak, Z. (2024). The Isometry Groups of IR_{DH}^3, IR_{PD}^3 and IR_{TI}^3 . *Hagia Sophia Journal of Geometry*, 6(1), 1-9.
- Horvath, A. G. (2017). Isometries of Minkowski geometries. *Linear Algebra and its Applications*, 512, 172–190.
- Martin, G. E. (1997). *Transformation geometry*. Springer-Verlag New York Inc.
- Senechal, M., (2013). *Shaping Space*, Springer New York Heidelberg Dordrecht London.
- Thompson, A.C., (1996). *Minkowski Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge.

Gilson-Pickering Denkleminin Kuintik Trigonometrik B-spline Kolokasyon Yöntemiyle Nümerik Çözümü

Melis ZORŞAHİN¹
Dursun IRK²

- 1- Doç. Dr.; Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü.
mzorsahin@ogu.edu.tr ORCID No: [0000-0001-7506-4162](https://orcid.org/0000-0001-7506-4162)
- 2- Prof. Dr.; Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü.
dirk@ogu.edu.tr ORCID No: [0000-0002-3340-1578](https://orcid.org/0000-0002-3340-1578)

ÖZET

Keyfi sınır ve başlangıç koşullarını içeren zaman ve konum değişkenlerine bağlı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek her zaman mümkün olmamaktadır. Analitik çözümün bulunmadığı durumlarda ise bu tip denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için yöntemler geliştirilmiştir. Zaman ayrıştırması yapıldıktan sonra konum ayrıştırması için sonlu elemanlar yöntemleri kullanılarak bu tip denklemlerin nümerik çözümlerinin araştırılması son zamanlarda sıklıkla yapılmaktadır.

Bu çalışmada konum ayrıştırması için sonlu elemanlar metodlarından biri olan kolokasyon metodu ile birlikte kuintik (beşinci derece) trigonometrik B-spline fonksiyonlar kullanılarak Gilson-Pickering denkleminin nümerik çözümü araştırılmıştır. Gilson-Pickering denklemi zamana bağlı üçüncü mertebeden lineer olmayan bir denklemdir. Zaman ayrıştırması için ise doğruluğu iki olan Crank-Nicolson metodu tercih edilmiştir. Lineer olmayan Gilson-Pickering kısmi diferansiyel denkleminin lineerleştirilmesi için kuasi-linerizasyon yöntemi kullanılmıştır. Önerilen yöntemin doğruluğunu gösterebilmek adına nümerik çözümü araştırılan Gilson-Pickering kısmi diferansiyel denkleminin solitary dalga analitik çözümünü içeren bir test problemi kullanılmıştır. Elde edilen sonuçları yorumlayabilmek ve nümerik sonuçlar ile analitik çözüm değerlerini karşılaştırabilmek için solitary dalgaların durumunu ve mutlak hatayı gösteren grafikler çizilmiş, bulunan sonuçlar ise tabloda gösterilmiştir. Şekillerden önerilen yöntemin kabul edilebilir düzeyde hata değeriyle tek bir solitary dalganın simülasyonunu başarılı şekilde modellediği görülmüştür. Tablo incelendiğinde ise Gilson-Pickering denkleminin yaklaşık çözümü için önerilen yöntem ile elde edilen maksimum hataların da kabul edilebilir olduğu ve literatürde verilen korunum kanunlarının analitik değerleriyle de uyumlu sonuçlar bulunduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler – Gilson-Pickering Denklemi; Kolokasyon Metodu; Kuintik Trigonometrik B-Spline Fonksiyonu; Crank-Nicolson Metodu; Kuasi- Linearizasyon.

GİRİŞ

Gilson-Pickering denklemi oluşum denklemlerinden biridir. İlk olarak 1995 senesinde Gilson ve Pickering tarafından $\varepsilon, \kappa, \alpha, \beta$ keyfi sabitler olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Gilson, 1995):

$$u_t - \varepsilon u_{xxt} + 2\kappa u_x - uu_{xxx} - \alpha uu_x - \beta u_x u_{xx} = 0. \quad (1)$$

Bu tür denklemler, akışkanlar mekaniği, plazma fiziği vb. gibi uygulamalı bilimlerin çeşitli dallarında birçok çalışmanın ilgi odağıdır. Gilson-Pickering denkleminin tanh-coth yöntemi (Irshad, 2012), G/G-expansion yöntemi (Fan vd., 2009; Yokuş vd., 2020), meshless yöntemi

(Zabihi ve Saffarian, 2018), sonlu elemanlar yöntemi (Ak vd., 2019; Karakoç vd., 2023; Esen vd., 2018) gibi farklı yöntemler yardımıyla nümerik çözümleri daha önceden elde edilmiştir. Bu bölümde Gilson-Pickering denkleminin nümerik çözümü için bir sonlu elemanlar yöntemi olan kolokasyon yöntemi ele alınacaktır. Çözümü araştırılacak olan denklemin zaman ayrıştırması için Crank-Nicolson yöntemi uygulanacaktır. Denklemin konum ayrıştırmasını elde etmek için, kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonuna bağlı kolokasyon yöntemi uygulanacaktır. Üçüncü mertebeden Gilson-Pickering denklemini lineer olmayan bir kısmı diferansiyel denklem olduğundan, önerilen yöntem uygulandıktan sonra denklemdaki lineer olmayan terimler için kuasi-linerizasyon tekniği kullanılarak denklem lineerleştirilecektir. Denklemin nümerik çözümünü araştırmak için önerilen yöntemin doğruluğunu ölçmek adına ise solitary dalga'nın yayılımına karşılık gelen analitik çözümü içeren bir test problemi kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılacaktır.

KUİNTİK TRİGONOMETRİK B-SPLİNE KOLOKASYON METODU

$[a, b]$ aralığı, h konum adımı olmak üzere eşit aralıklı x_i ; $i = 0, \dots, N$ düğüm noktalarına sahip olsun ve (1) denklemini için aşağıdaki başlangıç ve sınır koşulları verilsin:

$$u(a, t) = 0, u(b, t) = 0, t > 0, \quad (2)$$

$$u_x(a, t) = 0, u_x(b, t) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = f(x), x \in [a, b]. \quad (4)$$

$x_m = a + mh$; $m = 0, \dots, N$ ve $t_n = n\Delta t$; $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere düğüm noktalarındaki bilinmeyen fonksiyonların analitik çözümleri:

$$u(x_m, t_n) = u_m^n \quad (5)$$

ve nümerik çözümleri ise U_m^n olarak gösterilsin.

Zaman ayrıştırması

Gilson-Pickering denkleminin zaman ayrıştırması için

$$u_t = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}, u = \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, u_x = \frac{u_x^{n+1} + u_x^n}{2}, \dots$$

formülleri yardımıyla Crank-Nicolson yöntemi kullanılır ve denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \frac{u^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\varepsilon}{\Delta t} u_{xx}^{n+1} + \kappa u_x^{n+1} - \frac{(uu_{xxx})^{n+1}}{2} - \frac{\alpha}{2} (uu_x)^{n+1} \\ & - \frac{\beta}{2} (u_x u_{xx})^{n+1} = \frac{u^n}{\Delta t} - \frac{\varepsilon}{\Delta t} u_{xx}^n - \kappa u_x^n + \frac{(uu_{xxx})^n}{2} \\ & + \frac{\alpha}{2} (uu_x)^n + \frac{\beta}{2} (u_x u_{xx})^n \end{aligned} \quad (6)$$

denklemini elde edilir.

Kuasi-linerizasyonu

(6) denklemindeki lineer olmayan terimler için

$$(uu_{xxx})^{n+1} = u^{n+1}u_{xxx}^n + u^n u_{xxx}^{n+1} - (uu_{xxx})^n$$

$$(uu_x)^{n+1} = u^{n+1}u_x^n + u^n u_x^{n+1} - (uu_x)^n$$

$$(u_x u_{xx})^{n+1} = u_x^{n+1}u_{xx}^n + u_x^n u_{xx}^{n+1} - (u_x u_{xx})^n$$

formülleri ile kuasi-linerizasyon yöntemi uygulanarak denklem düzenlenirse

$$(2 - \alpha \Delta t u_x^n - \Delta t u_{xxx}^n)u^{n+1} + (2\kappa \Delta t - \alpha \Delta t u^n - \beta \Delta t u_{xx}^n)u_x^{n+1} + (-2\varepsilon - \beta \Delta t u_x^n)u_{xx}^{n+1} - (\Delta t u^n)u_{xxx}^{n+1} = 2u^n - 2\kappa \Delta t u_x^n - \varepsilon u_{xx}^n \quad (7)$$

denklemini elde edilir.

Konum ayrıştırması

Araştırılan nümerik çözümü bulmak için

$$U(x, t) = \sum_{j=-2}^{N+2} T_j^5(x) \delta_j(t) \quad (8)$$

yaklaşımında δ_j ler önerilen yöntemden elde edilecek olan bilinmeyenler ve

$$(\lambda_i)^l = \left(\sin \left(\frac{x - x_{k-l}}{2} \right) \right)^l, i = -3, \dots, 3, l = 1, \dots, 5$$

$$\theta = \sin \left(\frac{h}{2} \right) \sin(h) \sin \left(\frac{3h}{2} \right) \sin(2h) \sin \left(\frac{5h}{2} \right), k = 0, \dots, N.$$

olmak üzere

$$T_k^5(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} (\lambda_{-3})^5 & , X_{k-3} \leq x < X_{k-2} \\ -(\lambda_{-3})^4(\lambda_{-1}) - (\lambda_{-3})^3(\lambda_0)(\lambda_{-2}) \\ -(\lambda_{-3})^2(\lambda_1)(\lambda_{-2})^2 - (\lambda_{-3})(\lambda_2)(\lambda_{-2})^3 \\ -(\lambda_3)(\lambda_{-2})^4 & , X_{k-2} \leq x < X_{k-1} \\ (\lambda_{-3})^3(\lambda_0)^2 + (\lambda_{-3})^2(\lambda_1)(\lambda_{-2})(\lambda_0) \\ +(\lambda_{-3})^2(\lambda_1)^2(\lambda_{-1}) + (\lambda_{-3})(\lambda_2)(\lambda_{-2})^2(\lambda_0) \\ +(\lambda_{-3})(\lambda_2)(\lambda_{-2})(\lambda_1)(\lambda_{-1}) + (\lambda_{-3})(\lambda_2)^2(\lambda_{-1})^2 \\ +(\lambda_3)(\lambda_{-2})^3(\lambda_0) + (\lambda_3)(\lambda_{-2})^2(\lambda_1)(\lambda_{-1}) \\ +(\lambda_3)(\lambda_{-2})(\lambda_2)(\lambda_{-1})^2 + (\lambda_3)^2(\lambda_{-1})^3 & , X_{k-1} \leq x < X_k \\ -(\lambda_{-3})^2(\lambda_1)^3 - (\lambda_{-3})(\lambda_2)(\lambda_{-2})(\lambda_1)^2 \\ -(\lambda_{-3})(\lambda_2)^2(\lambda_{-1})(\lambda_1) - (\lambda_{-3})(\lambda_2)^3(\lambda_0) \\ -(\lambda_3)(\lambda_{-2})^2(\lambda_1)^2 - (\lambda_3)(\lambda_{-2})(\lambda_2)(\lambda_{-1})(\lambda_1) \\ -(\lambda_3)(\lambda_{-2})(\lambda_2)^2(\lambda_0) - (\lambda_3)^2(\lambda_{-1})^2(\lambda_1) \\ -(\lambda_3)^2(\lambda_{-1})(\lambda_2)(\lambda_0) - (\lambda_3)^3(\lambda_0)^2 & , X_k \leq x < X_{k+1} \\ (\lambda_{-3})(\lambda_2)^4 + (\lambda_3)(\lambda_{-2})(\lambda_2)^3 + (\lambda_3)^2(\lambda_{-1})(\lambda_2)^2 \\ +(\lambda_3)^3(\lambda_0)(\lambda_2) + (\lambda_3)^4(\lambda_1) & , X_{k+1} \leq x < X_{k+2} \\ -(\lambda_3)^5 & , X_{k+2} \leq x < X_{k+3} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonları kullanılacaktır. (8) ve (9) eşitliklerinden U yaklaşımı ve türevleri

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\sin^5\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \\
 a_2 &= \frac{2 \sin^5\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right) (16 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 3)}{\theta}, \\
 a_3 &= \frac{2 \left(1 + 48 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right) - 16 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right)\right) \sin^5\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \\
 b_1 &= -\frac{5 \sin^4\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right)}{2\theta}, \\
 b_2 &= -\frac{5 \sin^4\left(\frac{h}{2}\right) \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) (8 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 3)}{\theta}, \\
 c_1 &= \frac{5 \sin^3\left(\frac{h}{2}\right) (5 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 1)}{4\theta}, \\
 c_2 &= \frac{5 \sin^3\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right) (-15 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + 3 + 16 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right))}{2\theta}, \\
 c_3 &= -\frac{5 \sin^3\left(\frac{h}{2}\right) (16 \cos^6\left(\frac{h}{2}\right) - 5 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + 1)}{2\theta}, \\
 d_1 &= -\frac{5 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right) (25 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 13)}{8\theta}, \\
 d_2 &= -\frac{5 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) (8 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right) - 35 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + 15)}{4\theta}.
 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$U_N(x_m, t) = a_1 \delta_{m-2} + a_2 \delta_{m-1} + a_3 \delta_m + a_2 \delta_{m+1} + a_1 \delta_{m+2},$$

$$U'_N(x_m, t) = b_1 \delta_{m-2} + b_2 \delta_{m-1} - b_2 \delta_{m+1} - b_1 \delta_{m+2},$$

$$U''_N(x_m, t) = c_1 \delta_{m-2} + c_2 \delta_{m-1} + c_3 \delta_m + c_2 \delta_{m+1} + c_1 \delta_{m+2},$$

$$U'''_N(x_m, t) = d_1 \delta_{m-2} + d_2 \delta_{m-1} - d_2 \delta_{m+1} - d_1 \delta_{m+2}$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitliklerin (7) denkleminde kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= (2 - \alpha \Delta t u_x^n - \Delta t u_{xxx}^n) a_1 + (2\kappa \Delta t - \alpha \Delta t u^n - \beta \Delta t u_{xx}^n) b_1 \\
 &\quad + (-2\varepsilon - \beta \Delta t u_x^n) c_1 - (\Delta t u^n) d_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_2 &= (2 - \alpha \Delta t u_x^n - \Delta t u_{xxx}^n) a_2 + (2\kappa \Delta t - \alpha \Delta t u^n - \beta \Delta t u_{xx}^n) b_2 \\
 &\quad + (-2\varepsilon - \beta \Delta t u_x^n) c_2 - (\Delta t u^n) d_2,
 \end{aligned}$$

$$\gamma_3 = (2 - \alpha \Delta t u_x^n - \Delta t u_{xxx}^n) a_3 + (-2\varepsilon - \beta \Delta t u_x^n) c_3,$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_4 &= (2 - \alpha \Delta t u_x^n - \Delta t u_{xxx}^n) a_2 - (2\kappa \Delta t - \alpha \Delta t u^n - \beta \Delta t u_{xx}^n) b_2 \\
 &\quad + (-2\varepsilon - \beta \Delta t u_x^n) c_2 + (\Delta t u^n) d_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_5 &= (2 - \alpha \Delta t u_x^n - \Delta t u_{xxx}^n) a_1 - (2\kappa \Delta t - \alpha \Delta t u^n - \beta \Delta t u_{xx}^n) b_1 \\
 &\quad + (-2\varepsilon - \beta \Delta t u_x^n) c_1 + (\Delta t u^n) d_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_6 &= 2a_1 - 2\kappa\Delta tb_1 - \varepsilon c_1, \\
\gamma_7 &= 2a_2 - 2\kappa\Delta tb_2 - \varepsilon c_2, \\
\gamma_8 &= 2a_3 - \varepsilon c_3, \\
\gamma_9 &= 2a_2 + 2\kappa\Delta tb_2 - \varepsilon c_2, \\
\gamma_{10} &= 2a_1 + 2\kappa\Delta tb_1 - \varepsilon c_1
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\gamma_1\delta_{m-2}^{n+1} + \gamma_2\delta_{m-1}^{n+1} + \gamma_3\delta_m^{n+1} + \gamma_4\delta_{m+1}^{n+1} + \gamma_5\delta_{m+2}^{n+1} \\
= \gamma_6\delta_{m-2}^n + \gamma_7\delta_{m-1}^n + \gamma_8\delta_m^n + \gamma_9\delta_{m+1}^n + \gamma_{10}\delta_{m+2}^n
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Böylece, $N + 1$ denklem ve $N + 5$ bilinmeyenli bir denklem sistemi bulunur. Bu sistemin çözülebilmesi için (2) ve (3) sınır koşullar yardımıyla sistemdeki $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}$ ve δ_{N+2} bilinmeyenlerinin yok edilmesiyle $(N + 1) \times (N + 1)$ lik çözülebilir bir matris sistemi elde edilir. Zaman iterasyonunun başlayabilmesi için (4) başlangıç koşulu ve (2) ve (3) sınır koşullarından faydalanılıp sistem Matlab programı yardımıyla çözülür.

Test Problemı

Gilson-Pickering denklemi tarafından sağlanan korunum kanunları

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u dx \simeq h \sum_{j=1}^N u_j^n, \\
I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{6} (3u^2 + \varepsilon(u_x)^2) - 2\varepsilon u u_{xx} \right) dx \\
&\simeq h \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{6} (3(u_j^n)^2 + \varepsilon((u_x)_j^n)^2) - 2\varepsilon u_j^n (u_{xx})_j^n \right)
\end{aligned}$$

şeklindedir. Korunum kanunlarının yaklaşık değerleri sağdan dikdörtgenler kuralı ile hesaplanacaktır. Önerilen yöntemin doğruluğunu ölçmek için ise

$$L_{\infty} = \|u - U\|_{\infty} = \max_{0 \leq j \leq N} |u_j - U_j|$$

hata normu hesaplanacaktır.

Gilson-Pickering denklemi için $\kappa = 0.5; \varepsilon = 1; \alpha = -3; \beta = -1.5; c = 0.5$ parametre değerleri seçildiğinde $t \in [0,1]$ için bir analitik çözümü

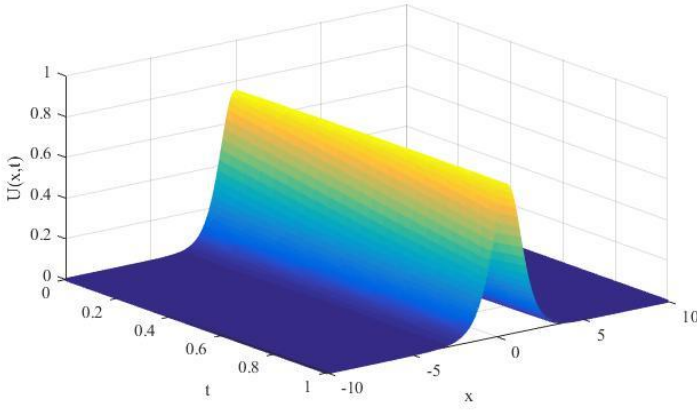
$$u(x, t) = \frac{3(c - 2\kappa)\varepsilon c}{\alpha\varepsilon\kappa - c + 2\kappa} (-1 + \tanh^2(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c - 2\kappa}{\varepsilon c}} (x - ct)))$$

şeklindedir. Bu çözüm için başlangıç ve sınır koşulları

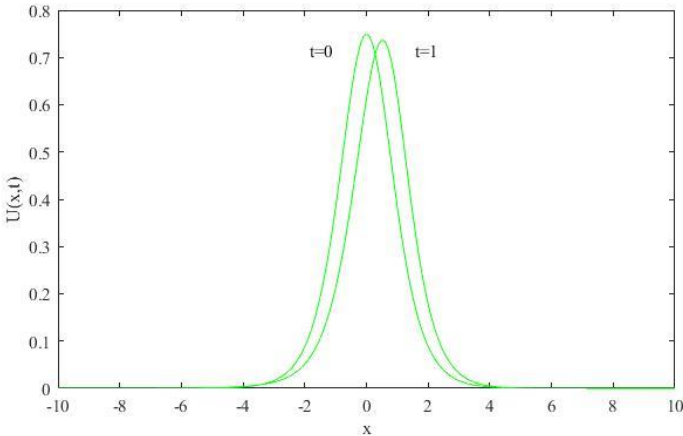
$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= \frac{3(c - 2\kappa)\varepsilon c}{\alpha\varepsilon\kappa - c + 2\kappa} (-1 + \tanh^2(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c - 2\kappa}{\varepsilon c}} x)), \\
u(-10, t) &= u(10, t) = 0 \\
u_x(-10, t) &= u_x(10, t) = 0
\end{aligned}$$

olarak seçilecektir. Önerilen yöntemle modellenecek olan tek solitary dalganın hareketi için konum adım değeri $h = 0.1$ ve zaman adım değeri $\Delta t =$

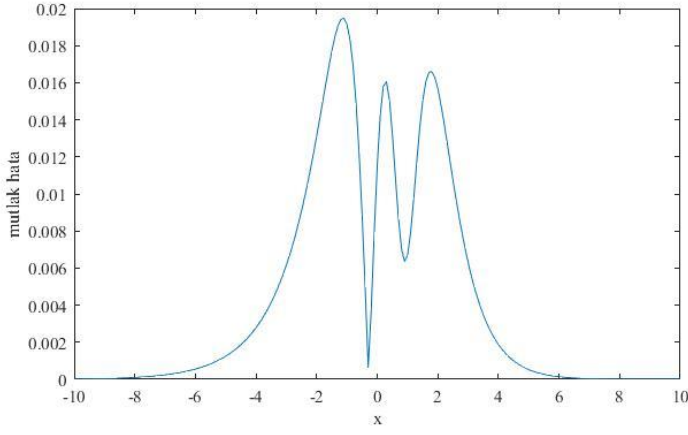
0.01 olarak alınacaktır. Şekil 1'de solitary dalganın zaman içerisindeki simülasyonu üç boyutlu olarak verilmiştir. Şekil den de görüldüğü üzere, solitary dalga simülasyon boyunca görsel olarak şekil değiştirmeksizin sola doğru ilerlemektedir. Şekil 2 de ise $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarındaki solitary dalgaların durumu verilmiştir. Görüldüğü üzere dalganın genliğinde bir miktar düşüş görülmektedir. Şekil 3'de ise önerilen yöntemle elde edilen nümerik çözümün $t = 1$ anındaki mutlak hata dağılımı verilmiştir. Mutlak hatanın en büyük değerinin dalgaların tepe noktası civarında geldiği görülmektedir. Farklı zamanlardaki L_∞ hatası ile ve korunum kanunlarının nümerik değerleri Tablo 1'de verilmiştir. Tablodaki değerlere göre önerilen yöntemle elde edilen çözümlerin analitik çözümle kıyaslandığında kabul edilebilir doğrulukta olduğu söylenebilir. Korunum kanunları değerleri ise simülasyon sürecinde gerçek değerine yakın kalmaktadır.



Şekil 1: Solitary dalga çözümleri



Şekil 2: $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarındaki solitary dalga çözümleri



Şekil 3: $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için $t = 1$ deki mutlak hata

Tablo 1: $h = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01$ için hata ve korunum değerleri

t	L_∞	I_1	I_2
0.0	0.0000000	1.7320507	0.6928203
0.1	1.6049591×10^{-3}	1.7320502	0.6925914
0.2	3.2667716×10^{-3}	1.7320491	0.6919052
0.3	4.9868196×10^{-3}	1.7320473	0.6907635
0.4	6.7624997×10^{-3}	1.7320447	0.6891694
0.5	8.6511406×10^{-3}	1.7320413	0.6871270
0.6	1.0611487×10^{-2}	1.7320370	0.6846418
0.7	1.2651068×10^{-2}	1.7320318	0.6817203
0.8	1.4838851×10^{-2}	1.7320255	0.6783703
0.9	1.7098078×10^{-2}	1.7320180	0.6746004
1.0	1.9477410×10^{-2}	1.7320093	0.6704208

SONUÇ

Gilson-Pickering denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için konum ayrıştırmasında trigonometrik kuintik B-spline fonksiyonuna bağlı kolokasyon yöntemi ve zaman ayrıştırmasında Crank-Nicolson yöntemi kullanılmıştır. Gilson-Pickering denklemini lineerleştirmek için kuasi linerizasyon tekniği kullanılmıştır. Önerilen yöntemin doğruluğunu ölçmek için tek bir solitary dalganın hareketini içeren bir test problemi incelenmiş ve önerilen yöntemin Gilson-Pickering denkleminin yaklaşık çözümü için alternatif bir yöntem olarak kullanılabileceği görülmüştür.

REFERANSLAR

- Ak, T., Asit, S ve Sharanjeet, D. (2019). Performance of a hybrid computational scheme on traveling waves and its dynamic transition for Gilson--Pickering equation. *International Journal of Modern Physics C*, 30(4), 1950028.
- Esen, A., Karaagac, B., Yagmurlu, N. M. ve Ucar, Y. (2018). Numerical Solutions of Gilson Pickering Equation by the Collocation Finite Element Method, *International Conference on Applied Mathematics in Engineering (ICAME)*, Balıkesir, *Türkiye Kongresine sunulmuş bildiri*
- Fan, X., Yang, S. ve Zhao, D. (2009). Travelling wave solutions for the Gilson-Pickering equation by using the simplified G'/G-expansion method. *International Journal of Nonlinear Science*, 8(3), 368-373.
- Gilson, C. ve Pickering, A. (1995). Factorization and Painleve analysis of a class of nonlinear third-order partial differential equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 28(10), 2871-2888.
- Irshad, A. ve Tauseef Mohyud-Din, S. (2012). Tanh-Coth method for nonlinear differential equations. *Studies in Nonlinear Sciences*, 3(1): 24-48.
- Karakoç, S. B. G., Bhowmik, S. K., Omrani, K. ve Sucu, D. Y. (2023). A numerical treatment for the Gilson-Pickering equation using collocation method with error estimation. *Sigma*, 41(4), 875-884.
- Yokuş, A., Durur, H., Abro, K. A. ve Kaya, D. (2020). Role of Gilson--Pickering equation for the different types of soliton solutions: a nonlinear analysis. *The European Physical Journal Plus*, 135(657), 1-19.
- Zabihi, F. ve Saffarian, M. (2018). A not-a-knot meshless method with radial basis functions for numerical solutions of Gilson-Pickering equation. *Engineering with Computers*, 34, 37-44.

Katalan Cisimler ve Metrik Geometrilerin İlişisine Dair Bir Araştırma

Özcan GELİŞGEN¹

1- Prof. Dr.; Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü. gelisgen@ogu.edu.tr ORCID No: 0000-0001-7071-6758

ÖZET

Bu bölümde neredeyse insanlığın yeryüzünde varoluşundan itibaren ilgi duyulmuş olan bir araştırma alanı olan geometrinin ilginç ve dikkat çeken çalışma alanlarından ikisi olan çokyüzlüler ile metrik geometriler ele alınmıştır. Buna göre, bahsi geçen alanlardan ilk ele alınan konu binlerce yıllardır insanların ilgisi çeken 3- boyutlu uzayda yaşayan geometrik şekillerden çokyüzlülerin kısmen genç ve ilgi çekici bir sınıfı olan Katalan cisimlerdir. İkinci ele alınan alanın konusu ise çokyüzlülere nispeten çok daha genç bir alan olup ancak en çok bir yüzyıla dayanan bir maziye sahip olan metrik geometriler konusudur. Özelliklerde son yıllarda yoğunlaşan çalışmalar ile bu iki alanın kesişimin de yer alan konulara dair çalışmaların artmakta olduğu gözlenmektedir. Buna göre bu bahsi geçen araştırma alanları ile ilgili çalışmalardan yola çıkarak, Katalan cisimleri küre kabul edecek şekilde metriklerin dolayısıyla bu metrikler ile oluşturulan metrik geometrilerin varlıkları araştırılmış ve daha sonrasında ilgili metrik uzayların sağladığı bir takım geometrik özellikler incelenmiştir. Son olarak da Felix Klein'in geometri yaklaşımına uyumlu olacak biçimde yani bir kümenin kendi üzerine bazı dönüşümler altında değişmez kalan özelliklerin incelenmesi tanımına uygun olacak şekilde ele alındığında bu bağlamda teşkil edilecek olan metrik uzaylarda uzaklık kavramını koruyan dönüşümler olan izometrilere neler oldukları ortaya konulmuştur. Sonrasında ise ilgili uzayların izometri grubunun 3-boyutlu analitik uzayda bilinen Öklidyen öteleme grubu ile söz konusu Katalan cismin simetri grubunun yarı direkt çarpımı olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler – Çokyüzlü; Katalan Çokyüzlüler; Metrik; Metrik Geometri; İzometri Grubu.

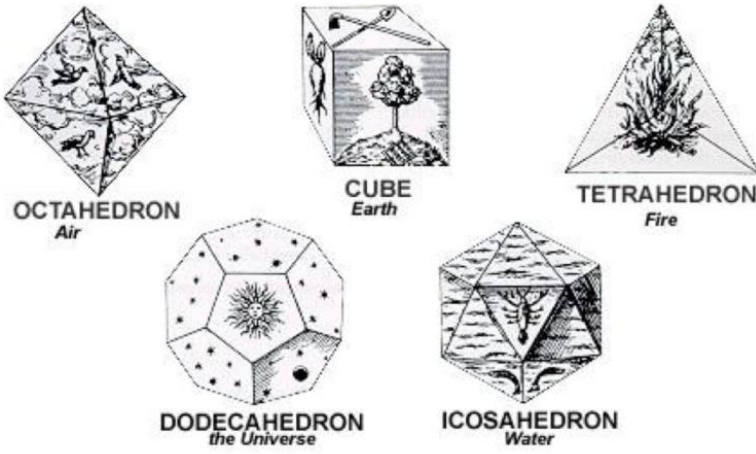
KATALAN CİSİMLER

Beşeriyetin dünyada görülmesinden bu yana geçip giden zaman boyunca insanları meşgul eden kendisine ilgi duyurutan matematiğe dair iki temel çalışma alanı geometri ve aritmetiktir. Dolayısıyla bu söylemde de anlaşılacağı üzere geometri geçmişinde de insanlık tarihi kadar uzundur. İlk zamanlarda geometrik problemler olarak insan görüp algılayabildiği ve bunun yanı sıra kullandığı şekillere ilgi duymuş ve bunlara dair problemlere çalışmıştır. Şüphesiz ki öncelikli olarak 2-boyutlu ve gündelik yaşantısında çevresinde sıklıkla karşılaştığı veya kafasını kaldırdığından geceleri gökyüzünde gördüğü yapılar olan üçgen, dörtgen vb. gibi yapılar ve bunların mükemmelleşmiş hali olan çember ile ilgilenmişlerdir. Ancak sonralar da boyut arttırarak 3-boyutlu uzayda yer alan cisimler ile ilgilenmeye başlamışlardır. Bunları destekleyecek kanıt niteliğindeki eserler olan

milattan önceki yıllardan kalma bazı tablet ve yazıtlarda 2-boyutlu ve 3-boyutlu şekillere ve cisimlere dair çeşitli bilgi ve işaretler (atıflar) söz konudur.

Bu noktada kendisi oldukça kısa olmasına rağmen cevabı için aynı şeyin söylemenin mümkün olmadığı bir soru gündeme gelir ki bu soru "Çokyüzlü nedir?" şeklindedir. Çokyüzlüler oldukça çeşitli ve zengin bir popülasyona sahip bir topluluktur. Popülasyonun bazı üyeleri oldukça eski iken bazı üyeleri henüz yeni doğmuş olabilirler, bazı üyelerini gündelik yaşamımızda ve çevremizde sıklıkla görebilirken bazı üyelerini çok nadir görürüz hatta bazılarını belki de hiç görmemiştir. Çokyüzlüler arasında konuşular dil matematiktir ancak ilk ziyarette veya ilk karşılaşma da yüz, kenar ve köşe kavramlarını bilmek yeterlidir. Çokyüzlü kelimesi Yunanca "çok" ve Hint-Avrupa dilinde "koltuk" kelimelerinden gelmektedir. Geometri uzmanlarına göre, çok sayıda yüzü olan bir nesne anlamına gelir. Bizim amaçlarımız için bir çokyüzlünün yüzleri, yüzeyinin oluşturulduğu çokgenlerdir. Bir çokyüzlünün kenarları, yüzlerini sınırlayan doğru parçaları; köşeler ise üç veya daha fazla yüzün (ve dolayısıyla üç veya daha fazla kenarın) birleştiği noktalar.

Çokyüzlüler, simetriteri çok ilginç olduğu için bilim insanları ve sanatçılar tarafından oldukça uzun yıllardır incelenmektedir. Platonik cisimler adı verilen çokyüzlü grubu, var olan tüm şekiller arasında en büyük geometrik simetriye sahip olanlardır. Bu çokyüzlülerin her birinin, tüm yüzlerinin özdeş düzgün çokgenler ve her köşede aynı sayıda çokgen birleşmesi şeklindeki çok özel olan bu özelliklerinden dolayı düzenli adı verilir. Bu düzenlilik özelliğine sahip olan çokyüzlüler oluşturulmaya çalışıldığında beş tane oldukları anlaşılmıştır. Bu katı cisimler Platonik cisimler olarak bilinen tetrahedron (düzgün dörtyüzlü), hexahedron (düzgün altıyüzlü), octahedron (düzgün sekizyüzlü), dodecahedron (düzgün onikiyüzlü) ve icosahedron (düzgün yirmiyüzlü) dur. Aşağıdaki Şekil 1 de bahsi geçen Platonik cisimler görülmektedir. Antik Yunanlılar Platonik katıları kapsamlı bir şekilde incelemişlerdir. Bazı kaynaklar bu çokyüzlülerin keşiflerini Pisagor'a atfederken, bazı kaynaklar ise, onun yalnızca tetrahedron, hexahedron ve dodecahedrona aşina olabileceğini ve octahedron ve icosahedronun keşfinin Platon'un çağdaşı olan Theaetetus'a ait olduğunu ifade etmektedir. Ancak Platonik cisimler, isim babası olan Platon'un felsefesinde oldukça belirgindir. Platon, MÖ 360 civarında Timaeus diyalogunda bunlardan bahsetti ve burada dört klasik elementin her birini (toprak, hava, su ve ateş) düzenli bir katıyla ilişkilendirdi. Buna göre Toprak hexahedron ile hava octahedronla, su icosahedronla ve ateş tetrahedronla ilişkilendirildi. Platon, beşinci Platonik cisim olan dodecahedron hakkında belirsiz bir şekilde evren ile ilişkilendirdi.



Şekil 1: Platonik cisimler

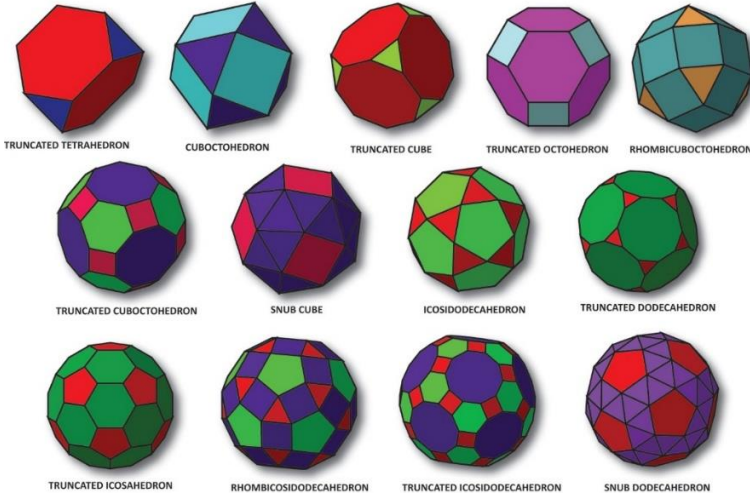
Eğer herhangi biri günümüzün parçacık fiziğinin anlayışını geçmişten gelen herhangi bir felsefeyle karşılaştırmak isterse, bu yalnızca Platon'un felsefesi olabilir, çünkü bugünün fiziğinin parçacıkları simetri gruplarının temsilleridir. Bu aslında kuantum teorisinin bize öğrettiği konudur ve dolayısıyla parçacıklar düzenli Platonik çokyüzlülere benzemektedir. Günümüzde, modern teknoloji ve disiplinler arası çalışmalar, birçok nanopartikülün bazı Platonik cisimleri ve diğer konveks simetrik çokyüzlülerini şekillerini aldığı doğrulamıştır. Doğadaki elementlerin fiziksel ve kimyasal özelliklerini içeren sınıflandırma, iyi bilinen periyodik tablo aracılığıyla yapılır.

Atom-altı dünyadaki temel parçacıkların fiziksel özelliklerini içeren sınıflandırma, monotip tablo veya geometrik desenlerden oluşmamıştır. 1960'lara kadar, " Kimyadaki periyodik tablo gibi alt-atomik dünyadaki temel parçacıklar için bir sınıflandırma var mıdır?" sorusu araştırılmıştır. Temel parçacıkların fiziksel özelliklerini (elektrik yükü, kütle, spin, vb.) içeren bir monotip sınıflandırma yoktur, ancak "sekiz katlı yol" olarak adlandırılan farklı konfigürasyonların temel parçacıkların geometrik desenlerini belirlediği bilinmektedir. Bu nedenle, bu bölümde incelenecek olan konveks simetrik çokyüzlüler ve metrik yapıları, temel parçacıkların fiziksel özelliklerine dayalı süper katmanların çeşitli çalışmalarında yeni uygulamalar sağlayabilir. Zikredilen bilgilerin ışığında, konveks simetrik çokyüzlüler yalnızca fiziksel ve geometrik grup teorisi çalışmalarında değil,

aynı zamanda tıp, astronomi, mimari vb. konulardaki araştırmalarda da gözlemlenmiştir.

Arşimet cisimleri, yüzleri düzgün çokgenler olan, ancak hepsi birbirine benzemeyen ve köşeleri birbirine simetrik olan on üç dışbükey çokyüzlüden oluşan bir kümedir. Arşimet pek itibar etmese de Arşimet cisimlerinin adları, bunları artık kayıp bir çalışmada ele alan Antik Yunan matematikçi Arşimet'ten almıştır. Bunlar başlangıçta Arşimet'e atfedilmemiş olsa da, İşkenderiyeli Pappus, Synagoge adlı derlemesinin beşinci bölümünde Arşimet'in on üç çokyüzlü sıraladığını ve bunları her türden kaç yüze sahip oldukları açısından kısaca tanımladığını belirtmiştir. Rönesans döneminde sanatçılar ve matematikçiler yüksek simetriye sahip saf formlara değer verdiklerinden bazı Arşimet cisimlerini eserlerinde tasvir etmişlerdir.

Arşimet cisimleri, köşe konfigürasyonuna ve oldukça simetrik özelliklere sahiptir. Köşe konfigürasyonu, iki veya daha fazla çokgen yüzü köşe noktasında birleşen bir çokyüzlü anlamına gelir. Bu durumdaki yüksek derecede simetrik özellikler, her bir cisimin Platonik cisimlerden çeşitli işlemler sonucunda türetildiği anlamına gelir. Bu işlemler kesme (truncation), düzeltme (rectification), genişletme (expansion) ve snob işlemleridir. Buna göre, kesme, köşeleri kesmeyi içerir; simetriyi korumak için, kesim çokgenin merkezine bir köşeyi birleştiren çizgiye dik bir düzlemdedir ve tüm köşeler için aynıdır. Kesme, bitişik köşelerden gelen her yüz çiftinin tam olarak bir noktayı paylaşacağı kadar derinse, buna düzeltme denir. Genişletme, her yüzü merkezden uzaklaştırmayı (Platonik cisimin simetrisini korumak için aynı mesafede) ve dışbükey gövdeyi almayı içerir. Snub, çokyüzlülerin çokyüzlü yüzlerini ayırarak, yüzlerini belirli açılarda bükerek ve bunları eşkenar üçgenlerle doldurarak yapılan bir çokyüzlüler inşa sürecidir. Aşağıda yer verilmiş olan şekil 2 de Arşimed cisimleri görölmektedir.

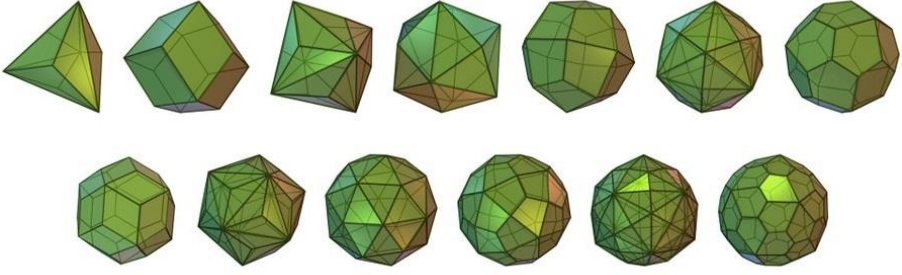


Şekil 2: Arşimed cisimleri

Geometride, her çokyüzlü ikinci bir dual yapı ile ilişkilendirilir; burada birinin köşeleri diğerinin yüzlerine, birinin köşe çiftleri arasındaki kenarlar da diğerinin yüz çiftleri arasındaki kenarlara karşılık gelir. Bu tür ikili şekiller kombinatoryal veya soyut çokyüzlüler olarak kalır, ancak hepsi geometrik çokyüzlüler olarak da oluşturulamaz. Herhangi bir çokyüzlüden başlayarak, onun dualinin duali orijinal çokyüzlünün kendisidir. Duallik, bir çokyüzlünün simetrilerini korur. Bu nedenle, simetrileriyle tanımlanan birçok çokyüzlü sınıfı için bir çokyüzlü ile onun duali aynı simetri sınıfına aittir.

Katalan cisimleri, Arşimet cisimlerinin dualleridir. Bir çokyüzlünün dualinin köşeleri, orijinal çokyüzlünün yüzlerinin orta noktalarıdır.

Katalan çokyüzlülerinin İspanyadaki Katalonya ile hiçbir ilgisi yoktur, ilk olarak 1865 yılında Belçikalı matematikçi Eugène Catalan tarafından tanımlanmalarından sonra isimlendirilmişlerdir. Bu çokyüzlülerin yüzleri düzgün çokgenler değildir, ancak hepsi eşittir.



Şekil 3: Katalan cisimleri

Katalan cisimlerin isimleri ve bu cisimlerin yüzlerini oluşturan düzgün çokgenlerin hangi türde ve kaç tane olduğunun bilgisini içeren liste aşağıdaki gibidir:

1. Triakis tetrahedron (12 ikizkenar üçgen)
2. Rhombic dodecahedron (12 eşkenar dörtgen)
3. Triakis octahedron (24 ikizkenar üçgen)
4. Tetrakis hexahedron (24 ikizkenar üçgen)
5. Deltoidal icositetrahedron (24 deltoid)
6. Disdyakis dodecahedron (48 çeşitkenar üçgen)
7. Pentagonal icositetrahedron (24 beşgen)
8. Rhombic triacontahedron (30 eşkenar dörtgen)
9. Triakis icosahedron (60 ikizkenar üçgen)
10. Pentakis dodecahedron (60 ikizkenar üçgen)
11. Deltoidal hexecontahedron (60 deltoid)
12. Disdyakis triacontahedron (120 çeşitkenar üçgen)
13. Pentagonal hexecontahedron (60 beşgen)

Bu konularla ilgili daha geniş ve detaylı bilgilere P. R. Cromwell' in 1997 basımı Polyhedra eserinden ve M. Senechal' ın 2013 basımı Shaphing Space isimli eserlerinden ve de ilgili eserlerdeki işaret edilen kaynaklardan ulaşılabilir.

MİNKOWSKİ GEOMETRİLER VE METRİKLERİ

Bu kısımda çokyüzlülere dair bilgilerin yanı sıra analitik 3-uzayda lineer yapısı Öklidyen 3-uzayla aynı olan yani noktalar kümesi, doğrular kümesi ve de noktalar ile doğrular kümesine dair ilişkileri düzenleyen üzerinde bulunma bağıntısının aynı olduğu dahası açıların Öklidyen 3-uzaydaki aynı yöntemle ölçüldüğü anlaşılabilecek olan Minkowski geometrilerden bahsedilecektir. Buna göre Minkowski geometrinin,

Öklidyen 3-uzayla tek farkının uzaklığın tüm doğrultularda aynı ölçülmemesi ya da kısaca metriğin Öklidyen 3-uzaydan farklı olmasıdır. Bu tarzda ifade edilen metrik geometriler Minkowski geometri genel adı ile anılır. Bu aşamada bir Minkowski geometride çalışma yapılırken metriğin ne olduğu bilindiğinden dolayı ilgili metriğe göre çalışılan uzayın küreleri belirlenebilir. Örneğin 3-boyutlu analitik uzayda taksi metriği ve ya maksimum (Chebyshev) metriği ele alınırsa ilgili uzayların küreleri sırasıyla octahedron ve hexahedron olarak karşımıza çıkmaktadır. Bunlar beş Platonik cisimin iki tanesidir. O halde bu aşama da akıllara doğal olarak hemen şu soru gelmektedir: “Diğer Platonik cisimleri küre kabul edecek şekilde metrikler dahası bu metrikler sayesinde Minkowski geometriler var mıdır?” O halde öncelikle doğal olarak çokyüzlünün ne olduğu sorunun cevabını verilmelidir. Buna göre $i = 1, \dots, n$ ve $j = 1, \dots, m$ için a_{ij} ve b_i reel sayılar olmak üzere sonlu çokluktaki

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

şeklinde ifade edilmiş olan lineer eşitsizliklerden oluşan sistemin çözümün kümesine yani

$$P = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right\}$$

kümesine bir çokyüzlü denir. Bu noktada çokyüzlünün her bir yüzü bir düzlemsel çokgen olacağından $j \in \{1, \dots, m\}$ olmak üzere $\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i = b_j$ denklemine yüzey denklemi denilir. Üstelik açıkça anlaşılabacağı üzere bir çokyüzlüyü belirten metrik bulunmak istediğinden bu yüzey denklemlerinin belirlenmesi gereklidir. Bu aşamada bu konuya dair detaylı bilgi ve açıklamalara Berger’ in 2004 ve 2009 basımı olan Geometry I ve Geometry II eserlerinden ve ayrıca Thompson’ un 1996 yılı yayımlanan Minkowski Geometry isimli eserinden ulaşılabılır.

Bir çokyüzlüyü küre olarak ifade edecek metriğin belirlenmesinde aşağıdaki maddelerdeki hususlara dikkat edilmesi gereklidir. Buna göre ilgili adımlar üç tane olup aşağıdaki şekildedir.

Adım 1: Çokyüzlüler, koordinat sisteminde en uygun simetriye sahip olacak şekilde yerleştirilir. Böylece, çokyüzlünün köşe noktaları simetrik olarak koordinatlanmış olacaktır.

Adım 2: Adım 1 de bahsedilen simetrik köşe noktaları kullanılarak çokyüzlünün simetrik olacak olan yüzey düzlem denklemleri bulunur.

Bu iki adım sayesinde çokgen için uzaklık fonksiyonu metrik uzayda simetri aksiyomunu sağlayacaktır.

Adım 3: Son olarak, çokyüzlülerin yüzlerini içeren düzlemlerin denklemlerini içeren genel bir ilişki verilmelidir. Metrik uzayda uzaklığın negatif olmaması aksiyomu sağlamak için, bu genel ilişki mutlak değer fonksiyonunun kullanımıyla verilir.

Sonuç olarak yüzey denklemleri arasında verilen genel ilişki, bu üç adım sayesinde ve çokgenin dışbükey ve simetrik olması nedeniyle otomatik olarak üçgen eşitsizliğini sağlayacaktır. Daha basitçe verilmiş olan ifade aranan ilgili metrik olacaktır. Fonksiyonel analizde ve dahası Minkowski geometriler de verilen bir çokyüzlüyü küre kabul edecek metriğin mevcut bilinmemektedir. Ancak bu metriğin ne olduğu ya da nasıl tanımlı olduğu bilinmemektedir. Böylelikle yukarıda ifade edilen yöntem ile bu probleme bir çözüm getirilmiş olur. O halde artık verilen bir çokyüzlüyü küre kabul edecek metrik kolaylıkla gerekli olan biraz uzun ve sıkıcı olabilecek hesaplamalar yapılarak teşkil edilebilir.

Bu noktada bölüm boyunca kullanılacak olan bir gösterime açıklık getirilsin. $N_1 = (x_1, y_1, z_1), N_2 = (x_2, y_2, z_2) \in IR^3$ olmak üzere

$$U = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$$

olsun. Ayrıca (+) ve (-) ile $X = |x_1 - x_2|, Y = |y_1 - y_2|, Z = |z_1 - z_2|$ ifadeleri arasındaki $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X$ ve $Z \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow Z$ şeklindeki sırasıyla pozitif ve negatif yönlü yönlendirilmeler işaret edilmektedir. Örneğin $U = X = |x_1 - x_2|$ ise $U^+ = Y = |y_1 - y_2|$ ve $U^- = Z = |z_1 - z_2|$ olacaktır.

Tanım 2.1: $N_1 = (x_1, y_1, z_1), N_2 = (x_2, y_2, z_2) \in IR^3$ herhangi iki nokta olsun. Bu taktirde $\Delta \in \{H, O, D, I\}$ ve $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\lambda = \varphi - 1$, $\mu = 2\varphi - 3$, $\delta = 2 - \varphi$ olmak üzere

$$d_H(N_1, N_2) = U$$

$$d_O(N_1, N_2) = U + U^+ + U^-$$

$$d_D(N_1, N_2) = U + \lambda U^+$$

$$d_I(N_1, N_2) = \max\{U + \delta U^-, \lambda(U + U^+ + U^-)\}$$

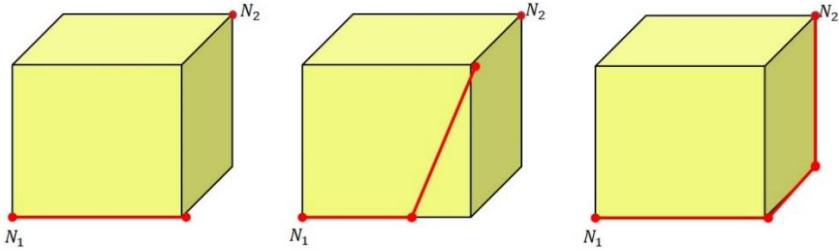
şeklinde tanımlı $d_\Delta: IR^3 \times IR^3 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna sırasıyla $N_1 = (x_1, y_1, z_1), N_2 = (x_2, y_2, z_2) \in IR^3$ noktaları arasındaki hexahedron (maksimum veya Chebyshev), octahedron (taksi), dodecahedron ve icosahedron uzaklık fonksiyonu adı verilir.

Yukarıdaki tanımda 3-boyutlu analitik uzay için verilmiş olan bu metriklerden ilk ikisi maksimum ve taksi metrik olarak bilinirken diğer ikisi dodecahedron ve icosahedron metrikleri Temel Ermiş'in doktora tezinde verilmiştir. Böylelikle Platonik cisimlerden tetrahedron hariç diğer dört cismi küre kabul edecekler metrikler teşkil edilmiş olur. Sadece tetrahedronu küre kabul edecek metrik bulunulamamıştır. Dahası tetrahedronu küre kabul eden metrik yoktur, ancak tetrahedronu verecek şekilde semi-metrik verilebilir.

Bunun yanı sıra yukarıdaki metriklerde;

- $d_\Delta(N_1, N_2) = U$ veya $d_\Delta(N_1, N_2) = \alpha U$ şeklinde bir ifade karşılık gelirse N_1 ile N_2 noktaları arasındaki en kısa yol eksenlerden birine paralel bir doğru parçası olup uzaklık ise bu doğru parçasının Öklidyen uzunluğu veya Öklidyen uzunluğun α katı olur.

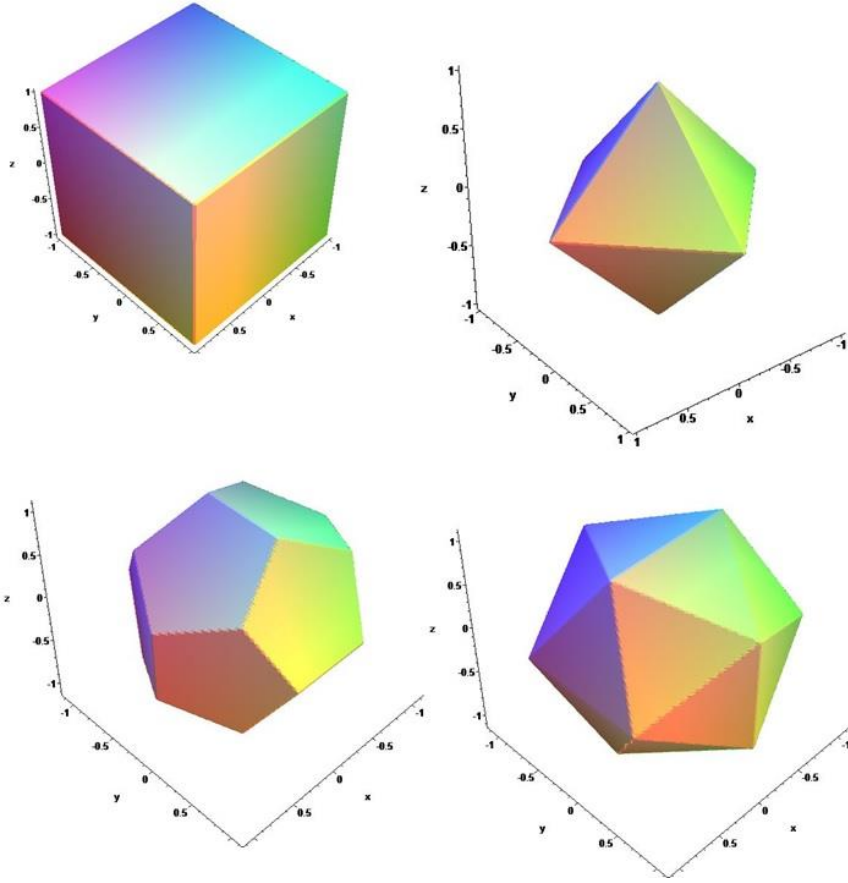
- $d_{\Delta}(N_1, N_2) = U + \alpha U^{+/-}$ veya $d_{\Delta}(N_1, N_2) = \beta(U + \alpha U^{+/-})$ şeklinde bir ifade karşılık gelirse N_1 ile N_2 noktaları arasındaki en kısa yol biri eksenlerden birine paralel bir doğru parça ve diğeri bir diğeri eksen ile $\arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ radyanlık açı yapan doğru parçalarının birleşimi olup uzaklık ise bu doğru parçalarının Öklidyen uzunluklarının ilgili katlarının çarpılıp toplanmasıdır.
- $d_{\Delta}(N_1, N_2) = U + U^+ + U^-$ veya $d_{\Delta}(N_1, N_2) = \alpha(U + U^+ + U^-)$ şeklinde bir ifade karşılık gelirse N_1 ile N_2 noktaları arasındaki en kısa yol her biri bir eksene paralel olan üç doğru parçasının birleşimi olup uzaklık ise bu doğru parçalarının Öklidyen uzunluklarının toplamı veya ilgili Öklidyen uzunluk toplamının α katı olur.



Şekil 4: Platonik cisimlerin metriklerinin yolları

Teorem 2.1: Tanım 2.1 de ifade edilmiş olan hexahedron (maksimum veya Chebyshev), octahedron (taksi), dodecahedron ve icosahedron uzaklık fonksiyonları 3-boyutlu analitik uzayda birer metriktirler. Üstelik 3-boyutlu analitik uzayda bu metriklere göre merkezli birim küreler sırasıyla hexahedron, octahedron, dodecahedron ve icosahedrondur.

İspat: Bu teoremden yer verilen uzaklık fonksiyonlarının metrik olduklarının ispatına Gelişgen 2007 ve Ermiş 2014 kaynaklarından ulaşılabilir. İlgili uzaklık fonksiyonlarına veya metriklere göre merkezli birim kürelerin şekiller aşağıdaki şekil 5 de görüldüğü gibidir.



Şekil 5: Platonik cisimlerin metriklerinin merkezli küreleri

Platonik cisimleri küre kabul edecek şekildeki metriklere benzer olarak Katalan cisimleri küre kabul eden metrikler araştırılmıştır. Bunlara dair bilgilere Özcan Gelişgen, Gaye Zaim Erçınar, Gürol Bozkurt, Zeynep Can ve Zeynep Çolak'ın yaptığı çeşitli çalışmalarda ulaşılabilmektedir. İlgili araştırmacılar on üç Katalan cisimden on tanesi için metrik geometri oluşturdukları literatürdeki çalışmalarından anlaşılmaktadır. Buna göre triakis tetrahedron, pentagonal icositetrahedron ve pentagonal hexecontahedron için olanlar hariç diğer on Katalan cisim için küresi ilgili Katalan cisim olacak şekilde metrik geometri teşkil edilmiştir. Bu üç cisimden triakis tetrahedron tam simetrik olmadığından dolayı metrik değil ancak semi-metrik oluşturulabilirken, pentagonal icositetrahedron ve pentagonal hexecontahedron içinse köşe noktaların koordinatlarının fazlası ile karmaşık olmasından dolayı bir metrik bulunmamıştır.

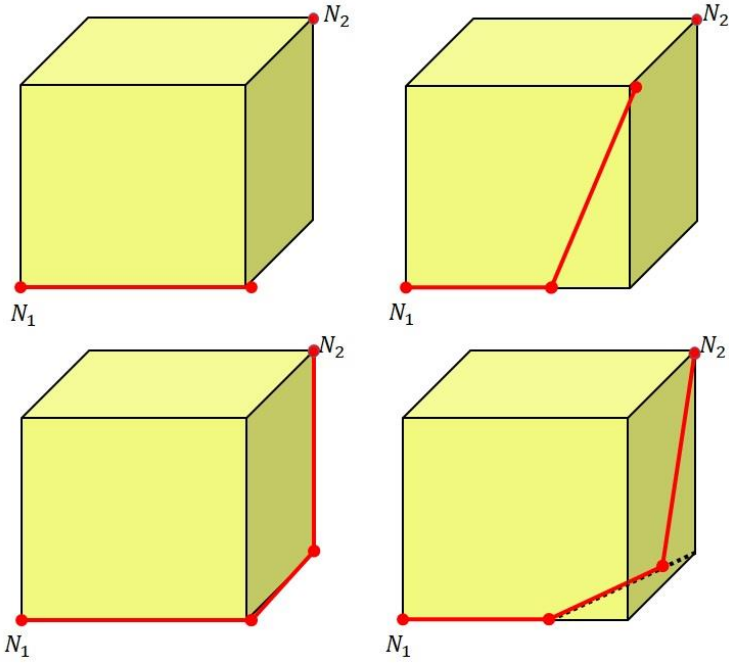
Tanım 2.2: $N_1 = (x_1, y_1, z_1), N_2 = (x_2, y_2, z_2) \in IR^3$ herhangi iki nokta olsun. Bu taktirde $\Delta \in \{RD, TO, TH, DI, DD, RT, TI, PD, DH, DT\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
d_{RD}(N_1, N_2) &= \max\{U + U^+, U + U^-\} \\
d_{TO}(N_1, N_2) &= U + U^+ + U^- + (\sqrt{2} - 2)\min\{U, U^+, U^-\} \\
d_{TH}(N_1, N_2) &= \max\{U + (\sqrt{3} - 1)U^+, U + (\sqrt{3} - 1)U^-\} \\
d_{DI}(N_1, N_2) &= U + (\sqrt{2} - 1)(U^+ + U^-) \\
d_{DD}(N_1, N_2) &= \max\left\{ \begin{array}{l} U + (\sqrt{2} - 1)U^+ + (\sqrt{3} - \sqrt{2})U^-, \\ U + (\sqrt{2} - 1)U^- + (\sqrt{3} - \sqrt{2})U^+ \end{array} \right\} \\
d_{RT}(N_1, N_2) &= \max\left\{ U, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}U + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}U^- + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}U^+ \right\} \\
d_{TI}(N_1, N_2) &= \max\left\{ \begin{array}{l} U + \frac{3\sqrt{5} - 5}{10}U^-, \frac{2\sqrt{5}}{5}U + \frac{\sqrt{5}}{5}U^- + \frac{3\sqrt{5} - 5}{10}U^+ \\ \frac{\sqrt{5} + 5}{10}U + \frac{5 - \sqrt{5}}{5}U^- + \frac{\sqrt{5}}{5}U^+ \end{array} \right\} \\
d_{PD}(N_1, N_2) &= \max\left\{ \begin{array}{l} U + \frac{\sqrt{5} - 1}{6}U^+, \frac{\sqrt{5} + 3}{6}U + \frac{\sqrt{5} - 1}{3}U^+ + \frac{1}{3}U^- \\ \frac{\sqrt{5}}{3}U + \frac{2}{3}U^- + \frac{\sqrt{5} - 1}{6}U^+ \end{array} \right\} \\
d_{DH}(N_1, N_2) &= \max\left\{ \begin{array}{l} \frac{3\sqrt{5} - 5}{2}U + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}U^-, U + (\sqrt{5} - 2)(U^+ + U^-), \\ (3 - \sqrt{5})U + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}U^+ + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}U^- \end{array} \right\} \\
d_{DT}(N_1, N_2) &= \max\left\{ \begin{array}{l} U + \frac{2\sqrt{5} - 3}{11}(U^+ + U^-), \frac{5\sqrt{5} + 9}{22}U + \frac{3\sqrt{5} + 1}{22}U^- + \frac{4\sqrt{5} - 6}{11}U^+ \\ \frac{\sqrt{5} + 15}{22}U + \frac{7\sqrt{5} - 5}{22}U^+ + \frac{7 - \sqrt{5}}{11}U^-, \\ \frac{3\sqrt{5} + 1}{11}U + \frac{3\sqrt{5} + 1}{22}U^+ + \frac{21 - 3\sqrt{5}}{22}U^- \\ \frac{5\sqrt{5} + 2}{11}U + \frac{2\sqrt{5} - 3}{11}U^+ + \frac{\sqrt{5} + 4}{11}U^- \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $d_\Delta: IR^3 \times IR^3 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna sırasıyla $N_1 = (x_1, y_1, z_1), N_2 = (x_2, y_2, z_2) \in IR^3$ noktaları arasındaki rhombic dodecahedron, triakis octahedron, tetrakis hexahedron, deltoidal icositetrahedron, disdyakis dodecahedron, rhombic triacontahedron, triakis icosahedron, pentakis dodecahedron, deltoidal hexecontahedron ve disdyakis triacontahedron metriği adı verilir.

Buna göre yukarıdaki metriklerde;

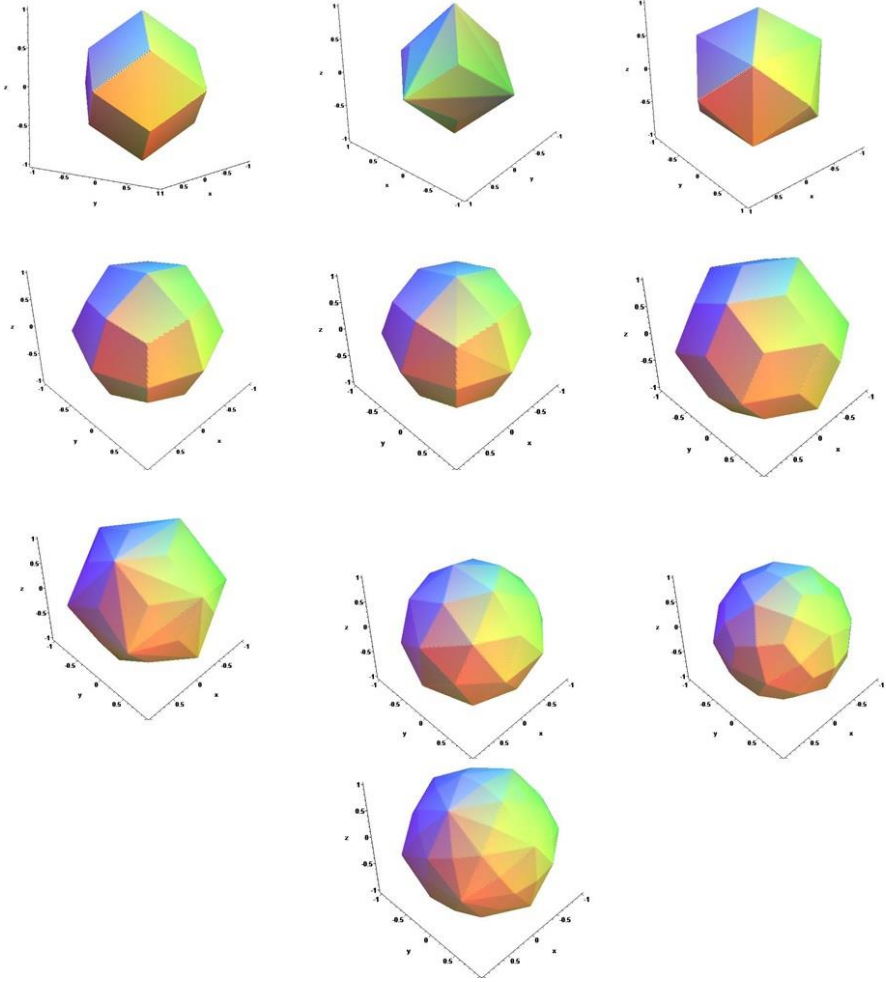
- $d_{\Delta}(N_1, N_2) = U$ veya $d_{\Delta}(N_1, N_2) = \alpha U$ şeklinde bir ifade karşılık gelirse N_1 ile N_2 noktaları arasındaki en kısa yol eksenlerden birine paralel bir doğru parçası olup uzaklık ise bu doğru parçasının Öklidyen uzunluğu veya Öklidyen uzunluğun α katı olur.
- $d_{\Delta}(N_1, N_2) = U + \alpha U^{+/-}$ veya $d_{\Delta}(N_1, N_2) = \beta(U + \alpha U^{+/-})$ şeklinde bir ifade karşılık gelirse N_1 ile N_2 noktaları arasındaki en kısa yol biri eksenlerden birine paralel bir doğru parça ve diğeri bir diğereksen ile $\arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ radyanlık açı yapan doğru parçalarının birleşimi olup uzaklık ise bu doğru parçalarının Öklidyen uzunluklarının ilgili katlarının çarpılıp toplanmasıdır.
- $d_{\Delta}(N_1, N_2) = U + U^+ + U^-$ veya $d_{\Delta}(N_1, N_2) = \alpha(U + U^+ + U^-)$ şeklinde bir ifade karşılık gelirse N_1 ile N_2 noktaları arasındaki en kısa yol her biri bir eksene paralel olan üç doğru parçasının birleşimi olup uzaklık ise bu doğru parçalarının Öklidyen uzunluklarının toplamı veya ilgili Öklidyen uzunluk toplamının α katı olur.
- $d_{\Delta}(N_1, N_2) = U + \alpha U^+ + \beta U^-$ veya $d_{\Delta}(N_1, N_2) = \gamma(U + \alpha U^+ + \beta U^-)$ şeklinde bir ifade karşılık gelirse N_1 ile N_2 noktaları arasındaki en kısa yol biri bir koordinat eksenine paralel ve diğerleri diğereksenler ile $\arccos\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ ve $\arccos\left(\frac{1}{\beta}\right)$ radyanlık açı yapan doğru parçalarının birleşimi olup uzaklık ise bu doğru parçalarının Öklidyen uzunluklarının toplamı veya ilgili Öklidyen uzunluk toplamının γ katı olur.



Şekil 6: Katalan cisimlerin metriklerinin yolları

Teorem 2.2: Tanım 2.2 de ifade edilmiş olan rhombic dodecahedron, triakis octahedron, tetrakis hexahedron, deltoidal icositetrahedron, disdyakis dodecahedron, rhombic triacontahedron, triakis icosahedron, pentakis dodecahedron, deltoidal hexecontahedron ve disdyakis triacontahedron uzaklık fonksiyonları 3-boyutlu analitik uzayda birer metriktirler. Üstelik 3-boyutlu analitik uzayda bu metriklerle göre merkezli birim küreler sırasıyla rhombic dodecahedron, triakis octahedron, tetrakis hexahedron, deltoidal icositetrahedron, disdyakis dodecahedron, rhombic triacontahedron, triakis icosahedron, pentakis dodecahedron, deltoidal hexecontahedron ve disdyakis triacontahedrondur.

İspat: Bu teoremde yer verilen uzaklık fonksiyonlarının metrik olduklarının ispatına Çolak 2016, Can 2016 ve Gelişgen, Kaya, Çolak ve Can'ın çeşitli kaynaklarından ulaşılabilir. İlgili uzaklık fonksiyonlarına veya metriklerle göre merkezli birim kürelerin şekiller aşağıdaki şekil 7 de görüldüğü gibidir.



Şekil 7: Katalan cisimlerin metriklerinin merkezil küreleri

Yardımcı Teorem 2.1: $N_1 = (x_1, y_1, z_1), N_2 = (x_2, y_2, z_2) \in IR^3$ 3-boyutlu analitik uzayda herhangi iki nokta ve bu noktalardan geçen doğru l olsun. Ayrıca d_E Öklidyen uzaklık fonksiyonu göstereceğiz ve l doğrusunun doğrultu vektörü (p, q, r) olsun. $U_d = \max\{|p|, |q|, |r|\}$ ve U_d^+ ve U_d^- ifadeleri de U_d nin pozitif ve negatif yönlendirmeleri olmak üzere $\Delta \in \{H, O, D, I, RD, TO, TH, DI, DD, RT, TI, PD, DH, DT\}$ için

$$d_{\Delta}(N_1, N_2) = \frac{\rho_{\Delta}(N_1, N_2)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} d_E(N_1, N_2)$$

olur. Burada $\rho_{\Delta}(N_1, N_2)$ ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\rho_H(N_1, N_2) &= U_d \\
\rho_O(N_1, N_2) &= U_d + U_d^+ + U_d^- \\
\rho_D(N_1, N_2) &= U_d + \lambda U_d^+ \\
\rho_I(N_1, N_2) &= \max\{U_d + \delta U_d^-, \lambda(U_d + U_d^+ + U_d^-)\} \\
d_{RD}(N_1, N_2) &= \max\{U_d + U_d^+, U_d + U_d^-\} \\
d_{TO}(N_1, N_2) &= U_d + U_d^+ + U_d^- + (\sqrt{2} - 2)\min\{U_d, U_d^+, U_d^-\} \\
d_{TH}(N_1, N_2) &= \max\{U_d + (\sqrt{3} - 1)U_d^+, U_d + (\sqrt{3} - 1)U_d^-\} \\
d_{DI}(N_1, N_2) &= U_d + (\sqrt{2} - 1)(U_d^+ + U_d^-) \\
d_{DD}(N_1, N_2) &= \max\left\{ \begin{aligned} &U_d + (\sqrt{2} - 1)U_d^+ + (\sqrt{3} - \sqrt{2})U_d^-, \\ &U_d + (\sqrt{2} - 1)U_d^- + (\sqrt{3} - \sqrt{2})U_d^+ \end{aligned} \right\} \\
d_{RT}(N_1, N_2) &= \max\left\{ U_d, \frac{\sqrt{5} + 1}{2}U_d + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}U_d^- + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}U_d^+ \right\} \\
d_{TI}(N_1, N_2) &= \max\left\{ \begin{aligned} &U_d + \frac{3\sqrt{5} - 5}{10}U_d^-, \frac{2\sqrt{5}}{5}U_d + \frac{\sqrt{5}}{5}U_d^- + \frac{3\sqrt{5} - 5}{10}U_d^+ \\ &\frac{\sqrt{5} + 5}{10}U_d + \frac{5 - \sqrt{5}}{5}U_d^- + \frac{\sqrt{5}}{5}U_d^+ \end{aligned} \right\} \\
d_{PD}(N_1, N_2) &= \max\left\{ \begin{aligned} &U_d + \frac{\sqrt{5} - 1}{6}U_d^+, \frac{\sqrt{5} + 3}{6}U_d + \frac{\sqrt{5} - 1}{3}U_d^+ + \frac{1}{3}U_d^- \\ &\frac{\sqrt{5}}{3}U_d + \frac{2}{3}U_d^- + \frac{\sqrt{5} - 1}{6}U_d^+ \end{aligned} \right\} \\
d_{DH}(N_1, N_2) &= \max\left\{ \begin{aligned} &\frac{3\sqrt{5} - 5}{2}U_d + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}U_d^-, U_d + (\sqrt{5} - 2)(U_d^+ + U_d^-), \\ &(3 - \sqrt{5})U_d + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}U_d^+ + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}U_d^- \end{aligned} \right\} \\
d_{DT}(N_1, N_2) &= \max\left\{ \begin{aligned} &U_d + \frac{2\sqrt{5} - 3}{11}(U_d^+ + U_d^-), \frac{5\sqrt{5} + 9}{22}U_d + \frac{3\sqrt{5} + 1}{22}U_d^- + \frac{4\sqrt{5} - 6}{11}U_d^+ \\ &\frac{\sqrt{5} + 15}{22}U_d + \frac{7\sqrt{5} - 5}{22}U_d^+ + \frac{7 - \sqrt{5}}{11}U_d^-, \\ &\frac{3\sqrt{5} + 1}{11}U_d + \frac{3\sqrt{5} + 1}{22}U_d^+ + \frac{21 - 3\sqrt{5}}{22}U_d^- \\ &\frac{5\sqrt{5} + 2}{11}U_d + \frac{2\sqrt{5} - 3}{11}U_d^+ + \frac{\sqrt{5} + 4}{11}U_d^- \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki yardımcı teorem Platonik ve Katalan cisimlerinin metrikleri ile Öklidyen metrik arasındaki geçiş bağıntısı ortaya koymaktadır. Böylelikle herhangi iki nokta arasındaki Öklidyen ve ilgili Platonik veya Katalan cismine ait metrik arasında ilgi kurulmuş olur. Bu yardımcı teorem sayesinde ortaya konulmuş olan bu ilgi hemen aşağıdaki sonuçların ortaya çıkmasına imkân verir.

Sonuç 2.1: N_1, N_2 ve X , 3-boyutlu analitik uzayda herhangi doğrudan üç nokta ve $\Delta \in \{H, O, D, I, RD, TO, TH, DI, DD, RT, TI, PD, DH, DT\}$ olsun. Bu takdirde $d_E(N_1, X) = d_E(N_2, X)$ olması için gerek ve yeter koşul $d_\Delta(N_1, X) = d_\Delta(N_2, X)$ olmasıdır.

Sonuç 2.2: N_1, N_2 ve X , 3-boyutlu analitik uzayda doğrudan üç farklı nokta ve $\Delta \in \{H, O, D, I, RD, TO, TH, DI, DD, RT, TI, PD, DH, DT\}$ olsun. Bu takdirde $\frac{d_E(N_1, X)}{d_E(N_2, X)} = \frac{d_\Delta(N_1, X)}{d_\Delta(N_2, X)}$ olur. Yani bir doğru boyunca Öklidyen ve Platonik veya Katalan cisimin metriğinin oranları aynıdır.

MINKOWSKI GEOMETRİLERİN İZOMETRİ GRUPLARI

Geometrik araştırmalarda kullanılan üç temel geometrik yaklaşım söz konusudur. Bu araştırma yöntemleri basit anlamda ismen sentetik, metrik ve grup yaklaşımı olarak ifade edilebilir. Felix Kelin geometri tanımı, bir kümenin kendi üzerine olan bire-bir ve örten dönüşümlerin yani izomorfizmlerin altında değişmez kalan özelliklerin incelenmesi olup izomorfizmler altında uzaklığın değişmediği invariant kaldığı dönüşümlerin araştırılması bir grup yaklaşımıdır ve geometrinin izometri grubu olarak adlandırılır. Konveks kümeler geometrilerin izometrilere grubunun belirlenmesinde önemli bir rol oynar. Bu özellikler hareketler grubu altında değişmezdir ve geometri bu özellikleri inceler. Bir uzayın izometrilere grubu hakkında literatürde gerçekleştirilmiş ve yayımlanmış birçok çalışma vardır (Bkz. Muhtelif yıllarda yayımlanmış kaynakçada yer alan Gelişgen, Ermiş, Kaya, Çolak, Can, Savcı ve Günaltılı çalışmaları). Giriş bölümünde Minkowski geometrisinde lineer yapının Öklid yapısıyla neredeyse aynı olduğu sadece tek farkın uzaklığın her yönde aynı şekilde ölçülmediği belirtilmişti. Üstelik Öklid uzayındaki alışılmış küre yerine farklı bir metrik kullanıldığından birim küre belirli simetrik kapalı konveks bir kümedir. O halde akıllara mantıksal olarak herhangi bir Minkowski geometrinin izometri grubunun ne olacağı sorusu gelmektedir. Bu sorunun yanıtı kısmen de olsa Horvath'ın 2017 yılında yayımladığı makale ile verilmiştir. Buna göre Horvath herhangi bir Minkowski geometrisi için aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 3.1: $(V, \|\cdot\|)$ normlu uzayının birim küresi bir elips içinde iki düzlemi kesmiyorsa, $(V, \|\cdot\|)$ Normlu uzayının izometrilere grubu olan $I(3)$; Öklidyen ötelemelerin grubu $T(3)$ ile determinant değeri ± 1 olan lineer dönüşümlerin grubunun bir sonlu alt grubunun yarı-direkt çarpımıdır.

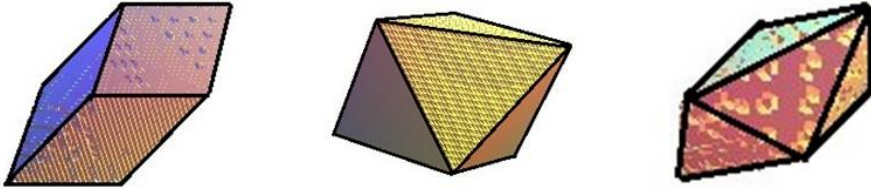
Bu teoremin ortaya atılmasından sonra açık bir şekilde geriye tek bir soru kalır. O soru da, teoremden bahsedilen ilgili alt grup ne olduğudur? Şimdi bu bağlamda Platonik ve ya Katalan cisimlerinin metrikleri ile

döşenmiş 3-boyutlu analitik uzayın izometri grubu ilgili cismin (Platonik veya Katalan cisim) simetri grubu ile Öklidyen ötelemelerin grubu $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımı olduğunu gösterilecektir. Burada ele alınan ya da metrikleri verilen Platonik veya Katalan cisimlerin simetri grupları iki farklı şekilde karşımıza çıkmaktadır. Bunlar iki Octahedral ve icosahedral simetri gruplarıdır. Yani açıkça octahedral simetri grubu O_h açıkça bir octahedronun (düzgün sekizyüzlünün) simetri grubu olup 48 hareket içermektedir. Icosahedral simetri grubu I_h da bir icosahedronun (düzgün yirmiyüzlünün) simetri grubu olup 120 hareket içermektedir. Bu hareketler bir düzgün sekizyüzlü veya düzgün yirmi yüzlüyü değiştirmeyen hareket olarak kısaca özetlenebilir.

Tanım 4.1: Katalan bir metrik ile döşenmiş 3-boyutlu analitik uzayda herhangi bir iki nokta N_1 ve N_2 olsun. Bu taktirde

$$\{X: d_\Delta(N_1, X) + d_\Delta(X, N_2) = d_\Delta(N_1, N_2)\}$$

kümesine N_1 ve N_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi adı verilir ve $[N_1 N_2]$ şeklinde gösterilir. Ele alınan Katalan cisimlerine dair metriklere ilişkin minimum uzaklık kümeleri ya bir paralel yüz ya da eşkenar veya deltoid tabanlı iki piramittir.



Şekil 8: Katalan cisimlerin metriklerinin minimum uzaklık küme tipleri

Önerme 4.1. $\varphi: IR^3 \rightarrow IR^3$ bir izometri ve $[N_1 N_2]$ ifadesi N_1 ve N_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi olsun. Bu taktirde

$$\varphi([N_1 N_2]) = [\varphi(N_1) \varphi(N_2)]$$

olur.

İspat: $M \in \varphi([N_1 N_2])$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} M \in \varphi([N_1 N_2]) &\Leftrightarrow \exists N \in [N_1 N_2] \ni M = \varphi(N) \\ &\Leftrightarrow d_\Delta(N_1, N) + d_\Delta(N, N_2) = d_\Delta(N_1, N_2) \\ &\Leftrightarrow d_\Delta(\varphi(N_1), \varphi(N)) + d_\Delta(\varphi(N), \varphi(N_2)) = d_\Delta(\varphi(N_1), \varphi(N_2)) \\ &\Leftrightarrow M = \varphi(N) \in [\varphi(N_1) \varphi(N_2)] \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1. $\varphi: IR^3 \rightarrow IR^3$ bir izometri ve $[N_1 N_2]$ ifadesi N_1 ve N_2 noktalarının minimum uzaklık kümesi olsun. Bu taktirde φ dönüşümü

köşeleri köşelere dönüştürür ve dahası $[N_1 N_2]$ minimum uzaklık kümesinin kenar uzunluklarını korur.

Önerme 4.2. $\varphi: IR_\Delta^3 \rightarrow IR_\Delta^3$ dönüşümü Δ bir Katalan cismi olmak üzere ilgili cismi ait metrik ile döşeli IR_Δ^3 uzayında $\varphi(O) = O$ özelliğini sağlayan bir izometri olsun. Bu durumda Katalan cisminin simetri grubuna bağlı olmak üzere $\varphi \in O_h$ veya $\varphi \in I_h$ olur.

İspat: $\Delta \in \{RD, TO, TH, DI, DD, RT, TI, PD, DH, DT\}$ olmak üzere on farklı Katalan cisim için on farklı metrikle bezenmiş uzayda her durum tek tek ele alınacaktır.

Durum 1: $\Delta = RD$ olsun. Bu durumda bu metrikle döşeli metrik uzayda $(0,0,1), (1,0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ve $(11,0)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = (1,1,0)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin rhombic dodecahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen dört noktasından geçen bir eşkenar tabanlı iki piramit olduğu görülür. Bu üç nokta rhombic dodecahedronun bir eşkenar dörtgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği rhombic dodecahedronun on iki eşkenar dörtgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüşebileceği 4 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 48 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen rhombic dodecahedronun simetri grubu olan octahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 2: $\Delta = TO$ olsun. Bu durumda bu metrikle döşeli metrik uzayda $(0,0,1), (1,0,0), (\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$ ve $(\sqrt{2}, \sqrt{2}-1, \sqrt{2})$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = (\sqrt{2}, \sqrt{2}-1, \sqrt{2})$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin triakis octahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen üç noktasından geçen bir paralelyüz olduğu görülür. Bu üç nokta triakis octahedronun bir ikizkenar üçgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği triakis octahedronun yirmi dört ikizkenar üçgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüşebileceği 2 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 48 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen triakis octahedronun simetri grubu olan octahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 3: $\Delta = TH$ olsun. Bu durumda bu metrikle döşeli metrik uzayda $(0,0,1), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ve $(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}+3}{3})$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}+3}{3})$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin tetrakis hexahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen üç noktadan geçen bir paralelyüz olduğu görülür. Bu üç nokta tetrakis hexahedronun bir ikizkenar üçgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği tetrakis hexahedronun yirmi dört ikizkenar üçgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüşebileceği 2 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 48 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen tetrakis hexahedronun simetri grubu olan octahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 4: $\Delta = DI$ olsun. Bu durumda bu metrikle döşeli metrik uzayda $(0,0,1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{2\sqrt{2}+1}{7}, \frac{2\sqrt{2}+1}{7}, \frac{2\sqrt{2}+1}{7})$ ve $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin deltoidal icositetrahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen dört noktadan geçen bir deltoid tabanlı iki piramit olduğu görülür. Bu dört nokta deltoidal icositetrahedronun bir deltoid yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği deltoidal icositetrahedronun yirmi dört deltoid yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüşebileceği 2 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 48 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen deltoidal icositetrahedronun simetri grubu olan octahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 5: $\Delta = DD$ olsun. Bu durumda bu metrikle döşeli metrik uzayda $(0,0,1), (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ve $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin disdyakis dodekahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen üç noktadan geçen bir paralelyüz olduğu görülür. Bu üç nokta disdyakis dodekahedronun bir çeşitkenar üçgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe

noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği disdyakis dodecahedronun kırk sekiz çeşitkenar üçgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüştürebileceği bir tek ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 48 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa disdyakis dodecahedronun simetri grubu olan octahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 6: $\Delta = RT$ olsun. Bu durumda bu metrikle dşeli metrik uzayda $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0, 1\right), \left(0, 1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right), \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ ve $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin rhombic triacontahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen dört noktasından geçen bir eşkenar dörtgen tabanlı iki piramit olduğu görülür. Bu dört nokta rhombic triacontahedronun bir eşkenar dörtgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği rhombic triacontahedronun otuz eşkenar dörtgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüştürebileceği 4 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 120 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen rhombic triacontahedronun simetri grubu olan icosahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

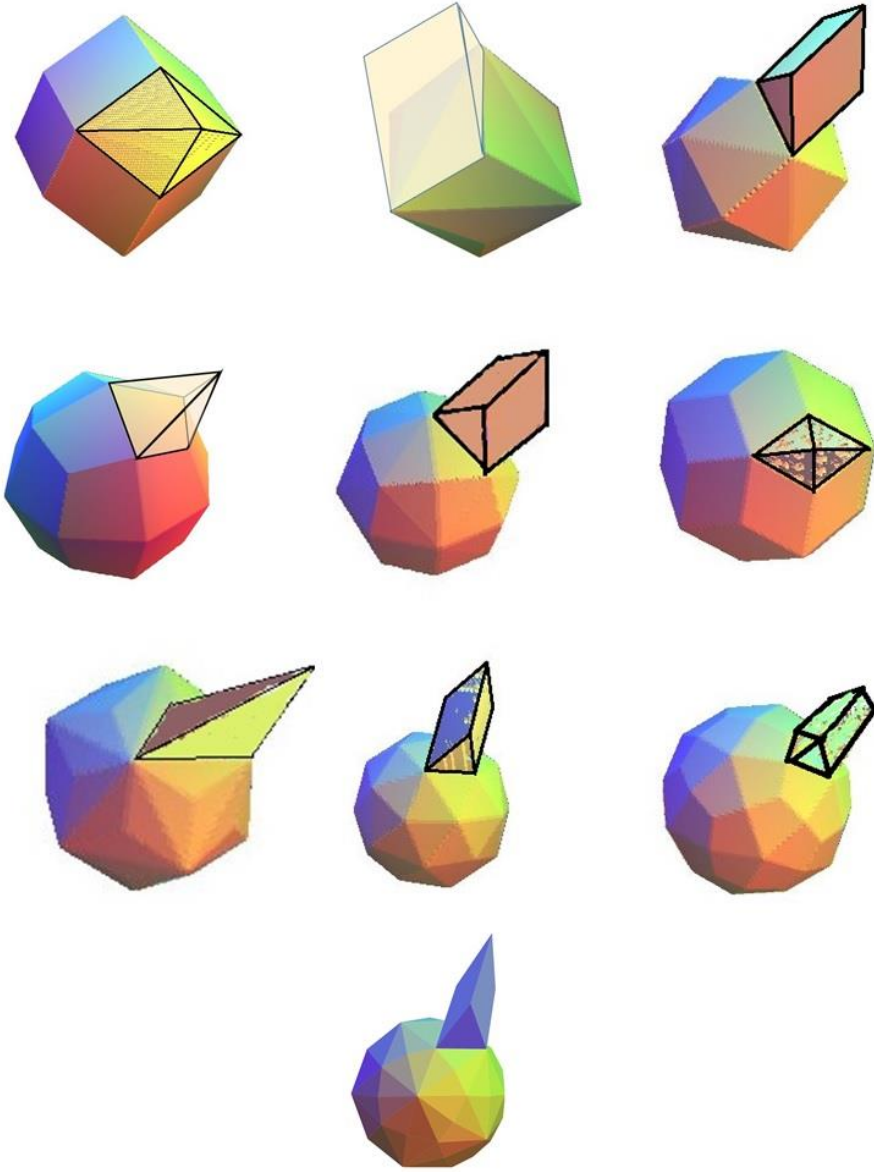
Durum 7: $\Delta = TI$ olsun. Bu durumda bu metrikle dşeli metrik uzayda $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 0, 1\right), \left(0, 1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), \left(0, \frac{4\sqrt{5}-5}{11}, \frac{7\sqrt{5}+5}{22}\right)$ ve $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{4\sqrt{5}+6}{11}, \frac{18\sqrt{5}+16}{22}\right)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{4\sqrt{5}+6}{11}, \frac{18\sqrt{5}+16}{22}\right)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin triakis icosahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen üç noktasından geçen bir paralelyüz olduğu görülür. Bu üç nokta triakis icosahedronun bir ikizkenar üçgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği triakis icosahedronun altmış ikizkenar üçgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüştürebileceği 2 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 120 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen triakis icosahedronun simetri grubu olan icosahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 8: $\Delta = PD$ olsun. Bu durumda bu metrikle dōşeli metrik uzayda $\left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right), \left(0, \frac{3\sqrt{5}+27}{38}, \frac{6\sqrt{5}-3}{19}\right), \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ ve $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3\sqrt{5}+65}{38}, \frac{31\sqrt{5}+13}{38}\right)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3\sqrt{5}+65}{38}, \frac{31\sqrt{5}+13}{38}\right)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin pentakis dodecahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen üç noktasından geçen bir paralelyüz olduğu görülür. Bu üç nokta pentakis dodecahedronun bir ikizkenar üçgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği pentakis dodecahedronun altmış ikizkenar üçgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüşebileceği 2 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 120 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen pentakis dodecahedronun simetri grubu olan icosahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 9: $\Delta = DH$ olsun. Bu durumda bu metrikle dōşeli metrik uzayda $\left(0, \frac{3\sqrt{5}+1}{22}, \frac{5\sqrt{5}+9}{22}\right), \left(0, \frac{\sqrt{5}+3}{6}, \frac{\sqrt{5}+1}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$ ve $\left(\frac{13\sqrt{5}-25}{44}, \frac{\sqrt{5}+6}{6}, \frac{73\sqrt{5}+61}{132}\right)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = \left(\frac{13\sqrt{5}-25}{44}, \frac{\sqrt{5}+6}{6}, \frac{73\sqrt{5}+61}{132}\right)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin deltoidal hexecontahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen üç noktasından geçen bir paralelyüz olduğu görülür. Bu üç nokta deltoidal hexecontahedronun bir deltoid yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği deltoidal hexecontahedronun 60 deltoid yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüşebileceği 2 farklı ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 120 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen deltoidal hexecontahedronun simetri grubu olan icosahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.

Durum 10: $\Delta = DT$ olsun. Bu durumda bu metrikle dōşeli metrik uzayda $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right), \left(\frac{4-\sqrt{5}}{3}, \frac{4-\sqrt{5}}{3}, \frac{4-\sqrt{5}}{3}\right), \left(0, \frac{\sqrt{5}+7}{10}, \frac{3\sqrt{5}-1}{10}\right)$ ve $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{\sqrt{5}+12}{10}, \frac{11\sqrt{5}+3}{20}\right)$ noktaları ele alınsın. O halde $O = (0,0,0)$ ve $D = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{\sqrt{5}+12}{10}, \frac{11\sqrt{5}+3}{20}\right)$ olmak üzere $[OD]$ minimum uzaklık kümesi göz önüne alındığından ilgili kümenin disdyakis triacontahedrona ait olan ve yukarıda bahsedilen dört noktasından geçen bir paralelyüz olduğu görülür.

Bu altı nokta disdyakis triacontahedronun bir çeşitkenar üçgen yüzünün köşeleridir. φ dönüşümü sonuç 4.1 gereğince minimum uzaklık kümesinin köşe noktalarını yine köşe noktalara dönüştürecek ve uzaklığı koruyacaktır. Dolayısıyla φ nin yukarıda bahsedilen noktaları dönüştürebileceği disdyakis triacontahedronun 120 çeşitkenar üçgen yüzü olup her bir yüz üzerinde bu noktaların dönüşebileceği bir tek ihtimal söz konusudur. Böylelikle toplam ihtimallerin sayısı 120 olur. Bu olasılıkların her biri tek tek ele alınırsa istenilen disdyakis triacontahedronun simetri grubu olan icosahedral grubun elemanı olduğu kolaylıkla görülür.



Şekil 9: Katalan cisimlerin ile minimum uzaklık kümeleri

Teorem 4.2: $\varphi: IR_{\Delta}^3 \rightarrow IR_{\Delta}^3$ dönüşümü Δ bir Katalan cismi olmak üzere ilgili cismi ait metrik ile dşeli IR_{Δ}^3 uzayı üzerinde bir izometri olsun. Bu taktirde $\varphi = T_A \circ \Phi$ olacak şekilde bir tek $T_A \in T(3)$ ve $\Phi \in \{O_h, I_h\}$ dönüşümleri vardır. Burada $T(3)$, 3-boyutlu analitik uzayın ötelemeler grubu ve O_h, I_h ile de octahedron ve icosahedronun simetri grupları temsil edilmektedir.

İspat: φ dönüşümü ilgili Katalan cisminin metriği ile dōşeli metrik uzayda $A = (a, b, c)$ olmak üzere $\varphi(O) = A$ özelliğindeki bir izometri olsun. Buna göre $\Phi = T_{-A} \circ \varphi$ dönüşümü tanımlansın. Bu taktirde açık bir şekilde $\Phi(O) = O$ özelliğinde bir izometri olacaktır. Böylelikle bir önceki önerme gereğince $\varphi = T_A \circ \Phi$ ve $\Phi \in \{O_h, I_h\}$ elde edilir. Dönüşümün tekliğinin ispatı ise aşikârdır. Böylece herhangi bir Katalan cisminin metriği ile dōşeli 3-boyutlu analitik uzayın izometrilere grubunun 3-boyutlu analitik uzayda bilinen Öklidyen ötelemeler grubu ile söz konusu Katalan cismin simetri grubunun yarı direkt çarpımı olduğu gösterilmiş olur.

SONUÇ

Bu bölümde insanlık tarihi kadar kadim bir araştırma çalışma alanı geometrinin ilginç ve dikkat çeken çalışma alanlarından ikisi olan çokyüzlüler ile metrik geometriler ele alınmıştır. Buna göre, bahsi geçen alanlardan ilk ele alınanının konusu binlerce yıllardır insanların ilgisi çeken 3- boyutlu uzayda yer yaşam alınan sahip olan geometrik şekillerden çokyüzlülerin güzel ve enteresan bir sınıfı olan Katalan cisimlerdir. İkinci ele alınan alanın konusu ise çokyüzlülere nispeten çok çok daha yeni olup ancak bir asıra dayanan bir maziye sahip olan metrik geometriler konusudur.

Özelliklerde son yıllarda yoğunlaşan çalışmalar ile bu iki alanın kesişimin de yer alan konulara dair çalışmaların sıklaştığı gözükmemektedir. Buna göre bu bahsi geçen konuyla ilgili çalışmalardan yola çıkarak, Katalan cisimleri küre kabul edecek şekilde metriklerin dolayısıyla bu metrikler ile oluşturulan metrik geometrilerin varlıkları araştırılmış ve daha sonrasında ilgili metrik uzayların sağladığı bir takım geometrik özellikler incelenmiştir. İlgili Katalan cismini küre kabul eden metrik ile Öklidyen metrik arasındaki geçiş bağıntıları bulunmuştur. Bu bağlantıdan yola çıkarak, bir doğrultu boyunca Öklidyen ve ilgili metriğin oranlarının yani bölme oranlarının değişmediği ortaya konmuştur.

Son olarak da Felix Klein'in bir kümenin kendi üzerine olacak şekilde bazı dönüşümler altında değişmez kalan özelliklerin incelenmesi olarak verdiği geometri tanımına uygun olarak oluşturulan ilgili metrik uzaylarda uzaklık koruyan dönüşümler yani izometrilere incelenerek dönüşümler tespit edilmiştir. Sonrasında ise ilgili uzayların izometri grubunun 3-boyutlu analitik uzayda bilinen Öklidyen ötelemeler grubu ile söz konusu Katalan cismin simetri grubunun yarı direkt çarpımı olduğu ortaya konmuştur.

REFERANSLAR

- Berger, M., (2004). Geometry I, Springer-Verlag.
- Berger, M., (2009). Geometry II, Springer-Verlag.
- Bozkurt, G. (2016). Üç boyutlu uzayda öklidyen, taksi ve Çin dama uzaklıkları yardımıyla oluşturulan bir metrik: Triakisoctahedron metriği. Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Can, Z., Gelişgen, Ö., ve Kaya, R. (2015). On the metrics induced by icosidodecahedron and rhombic triacontahedron. Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics (KoG), 19, 17–23.
- Can, Z., Çolak, Z., ve Gelişgen, Ö. (2015). A note On the metrics induced By triakis icosahedron and disdyakis triacontahedron. Eurasian Academy of Sciences Eurasian Life Sciences Journal / Avrasya Fen Bilimleri Dergisi, 1, 1–11.
- Can, Z. (2016). Bazı Konveks Çok Yüzlülerle İlgili Metrikler Ve Bu Metriklerin Geometrilere Üzerine. Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Cromwell, P. R. (1997). Polyhedra, Cambridge University Press.
- Çolak, Z., ve Gelişgen, Ö. (2015). New metrics for deltoidal hexacontahedron and pentakis dodecahedron, Sakarya University Journal of Science, 19(3), 353–360.
- Çolak, Z. (2016). Bazı Katalan Çokyüzlülerle İlgili Metrik Geometrilere Üzerine. Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Erçınar, G. Z. (2015). Birim küresi rhombic dodecahedron olan metriğin araştırılması. Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Ermiş, T. (2014). Düzgün çokyüzlülerin metrik geometrilere ile ilişkileri üzerine. Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Ermiş, T., ve Kaya, R. (2015). On the isometries the of 3- dimensional maximum space, Konuralp Journal of Mathematics, 3(1), 103–114.
- Ermiş, T., Savcı, Ü. Z., ve Gelişgen, Ö. (2019). A note about truncated rhombicuboctahedron and truncated rhombicicosidodecahedron space, Scientific Studies and Research Series Mathematics and Informatics, 29(1), 73–88.
- Ermiş, T. (2020). Geometric analysis of the some rectified Archimedean solids spaces via their isometry groups. Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 8(2), 96–109.
- Gelişgen, Ö. (2007). Minkowski geometrilere üzerine: Taksi, çin dama ve alfa geometrilere hakkında genel bir analiz. Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Gelişgen, Ö., ve Kaya, R. (2009). The Taxicab space group, Acta Mathematica Hungarica, 122(1–2), 187–200.
- Gelişgen, Ö., ve Kaya, R. (2015). The isometry group of Chinese Checker space. International Electronic Journal Geometry, 8(2), 82–96.

- Gelişgen Ö., ve Can, Z. (2016). On the family of metrics for some platonic and Archimedean polyhedra. *Konuralp Journal of Mathematics*, 4(2), 25–33.
- Gelişgen Ö., ve Çolak, Z. (2016). A family of metrics for some polyhedra. *Automation Computers Applied Mathematics Scientific Journal*, 25 (1), 35–48.
- Gelişgen, Ö., Ermiş, T., ve Günaltılı, İ. (2017). A note about the metrics induced by truncated dodecahedron and truncated icosahedron. *International Journal of Geometry*, 6(2), 5–16.
- Gelişgen Ö., ve Yavuz, S. (2019). A note about isometry groups of chamfered dodecahedron and chamfered icosahedron spaces. *International Journal of Geometry*, 8(2), 33–45.
- Gelişgen Ö., ve Yavuz, S. (2019). Isometry groups of chamfered cube and chamfered octahedron spaces. *Mathematical Sciences and Applications e-Notes*, 7(2), 174–182.
- Gelişgen Ö., ve Ermiş, T. (2020). The metrics for rhombicuboctahedron and rhombicosidodecahedron. *Palestine Journal of Mathematics*, 9(1), 15–25.
- Gelişgen Ö., ve Can, Z. (2023). The Group of Transformation Which Preserving Distance on Cuboctahedron and Truncated Octahedron Space. *New Trends in Mathematical Sciences*, 11(4), 101–108.
- Gelişgen Ö., ve Çolak, Z. (2023). The Isometry Group of Tetrakis Hexahedron and Disdyakis Dodecahedron Spaces. *New Trends in Mathematical Sciences*, 11(4), 92–100.
- Gelişgen Ö., ve Can, Z. (2024). The Group of Transformations which Preserving Distance on Some Polyhedral Space. *Hagia Sophia Journal of Geometry*, 6(1), 23-32.
- Gelişgen Ö., ve Çolak, Z. (2024). The Isometry Groups of IR_{DH}^3, IR_{PD}^3 and IR_{TI}^3 . *Hagia Sophia Journal of Geometry*, 6(1), 1-9.
- Horvath, A. G. (2017). Isometries of Minkowski geometries. *Linear Algebra and its Applications*, 512, 172–190.
- Martin, G. E. (1997). *Transformation geometry*. Springer-Verlag New York Inc.
- Senechal, M., (2013). *Shaping Space*, Springer New York Heidelberg Dordrecht London.
- Thompson, A.C., (1996). *Minkowski Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge.

